МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФИЛИАЛ ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.Г. ШУХОВА» в Новороссийске

(НФ БГТУ им. В.Г. Шухова)

Методические указания для выполнения индивидуального домашнего задания

по дисциплине

«Высшая математика»

для студентов всех направлений

Разработала: к.ф.-м..н. доцент

Колпакова Е.В.

Новороссийск 2020

Содержание

Введение

Цель преподавания математики в вузе — ознакомить студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических задач, привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям, развить логическое мышление и повысить общий уровень математической культуры, выработать навыки математического исследования прикладных вопросов и умение перевести задачу на математический язык.

Задачи изучения дисциплины:

- воспитание достаточно высокой математической культуры;
- привитие навыков современных видов математического мышления;
- использование математических методов и основ математического моделирования в практической деятельности.

1 Программа дисциплины

Раздел 1 Линейная алгебра

Матрицы и действия над ними. Определители, свойства определителей. Разложение определителя по строке или столбцу. Обратная матрица. Ранг матрицы. Системы линейных уравнений. Совместность системы, теорема Кронекера-Капелли. Метод Крамера. Метод Гаусса. Понятие о методе Жордана-Гаусса.

Раздел 2 Аналитическая геометрия

Геометрические вектора, операции над векторами. Коллинеарность, компланарность. Базис. Координаты вектора. Операции над координатами векторов. Угол между векторами. Проекция вектора на ось.

Скалярное произведение векторов и его свойства. Векторное произведение векторов и его свойства. Смешанное произведение.

Системы координат. Декартовы и полярные координаты точки на плоскости. Прямая на плоскости.

Общее уравнение плоскости. Угол между плоскостями; условия параллельности, перпендикулярности плоскостей. Расстояние от точки до плоскости. Прямая и плоскость в пространстве. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.

Кривые второго порядка на плоскости: эллипс, гипербола, парабола. Поверхности второго порядка.

Литература: [2], [3], [7]-[12].

Раздел 3 Пределы и дифференцирование функций одной переменной

Элементы теории множеств. Символика математической логики. Числовые последовательности и ее пределы. Предел функции в точке и на бесконечности. Первый и второй замечательные пределы. Число е.

Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Задачи, приводящие к производной. Определение производной, ее механический и геометрический смысл. Таблица производных. Основные правила дифференцирования. Производная сложной, неявной и обратной функций. Дифференциал функции, его геометрический смысл.

Производная и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора. Примеры разложения функций по формуле Тейлора и Маклорена. Основные теоремы дифференциального исчисления. Монотонность и экстремум функции. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба. Асимптоты. Полное исследование функций по схеме и построение графиков.

Литература: [1], [3], [7]-[10].

Раздел 4 Интегральное исчисление функции одной переменной.

Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных интегралов. Замена переменной, интегрирование по частям. Интегрирование рациональных функций, выражений, содержащих тригонометрические функции. Интегрирование иррациональных выражений.

Понятие определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям. Приложения определенных интегралов к вычислению площадей плоских фигур, длин дуг кривых. Приложение определенного интеграла к вычислению объема тела. Площадь поверхности тела вращения

Несобственные интегралы. Интегралы с бесконечными пределами. Интегралы от неограниченных функций.

Литература: [1], [2], [7]- [10].

Раздел 5 Функции нескольких переменных

Понятие о функциях многих переменных. Предел и непрерывность функции двух переменных. Частные производные и частные дифференциалы. Полный дифференциал. Экстремум функции многих переменных.

Производная по направлению. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Литература: [2], [3], [7]-[10].

Раздел 6 Теория функций комплексной переменной

Комплексные числа, изображение их на плоскости. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Операции над комплексными числами. Формула Муавра. Элементарные функции комплексной переменной. Производная функции комплексной переменной. Условия Коши-Римана. Дифференцируемость элементарных функций.

Литература: [1], [3], [7]-[10].

Раздел 7 Кратные и криволинейные интегралы.

Двойной интеграл. Вычисление двойного интеграла в декартовых и полярных координатах. Приложения двойного интеграла.

Криволинейные интегралы. Вычисление криволинейных интегралов. Приложения кратных и криволинейных интегралов к нахождению длины кривой, площади цилиндрической поверхности, массы кривой, статистического момента, момента инерции, работы силы.

Литература: [2], [3], [7] - [9].

Раздел 8 Дифференциальные уравнения

Задачи, приводящиеся к понятию дифференциального уравнения. Частное и общее решения. Теорема существования и единственности решения. Дифференциальные уравнения 1 порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения.

Линейные дифференциальные уравнения 1 порядка и методы их решения. Уравнения в полных дифференциалах.

Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Теорема существования. Дифференциальные уравнения старших порядков, допускающие понижение порядка.

Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Структура общего решения. Линейные уравнения старших порядков с постоянными коэффициентами. Однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Неоднородные уравнения с произвольной и специальной правой частью. Метод вариаций Лагранжа.

Системы дифференциальных уравнений в нормальной форме. Задача Коши. Сведение системы к одному дифференциальному уравнению. Понятие о дифференциальных уравнениях в частных производных.

Литература: [2], [3], [7]-[10], [16].

Раздел 9 Ряды.

Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница. Абсолютная и условная сходимости рядов.

Функциональные ряды. Сходимость в точке, область сходимости. Степенные ряды. Теорема Абеля. Ряд Тейлора. Разложение в степенной ряд некоторых элементарных функций. Применение.

Тригонометрический ряд Фурье. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций. Разложение в ряд Фурье функций произвольного периода

Литература: [2], [3], [7]-[10], [13].

Раздел 10 Случайные события.

Событие, классификация событий. Алгебра событий. Полная группа случайных событий. Классическое определение вероятности. Геометрическое определение вероятности. Теорема сложения. Условная вероятность. Теорема умножения. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Последовательность независимых испытаний. Схема Бернулли. Предельные теоремы Муавра-Лапласа и Пуассона.

Литература: [2], [3], [7]-[10], [13].

Раздел 11 Случайные величины.

Определение случайной величины. Функция распределения и ее свойства. Непрерывные и дискретные распределения. Примеры распределений. Математическое ожидание, дисперсия случайных величин. Их свойства. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел для последовательности независимых случайных величин. Теоремы Чебышева.

Литература: [2], [3], [4], [6] - [10], [15].

Раздел 12 Математическая статистика.

Понятие выборки. Точечные оценки параметров распределения по выборке. Понятие о доверительных интервалах и статистической проверке гипотез. Понятие о выборочной регрессии и методе наименьших квадратов. Теория игр.

Литература: [2], [3], [4], [6] - [10], [15].

2 Методические рекомендации по выполнению ИДЗ

Всего за курс изучения дисциплины "Высшая математика" предусматривается выполнение трех индивидуальных домашнего задания (ИДЗ) по одной ИДЗ за каждый семестр:

I семестр

ИДЗ 1: задачи №1-10

II семестр

ИДЗ 2: задачи №11-19

III семестр

ИДЗ 3: задачи №20-25

Перед выполнением работы студент должен изучить соответствующие разделы курса по учебным пособиям, рекомендуемым в данных методических указаниях. В них также приводятся решения типовых задач.

Каждая работа должна быть сделана в отдельной тетради в клетку, на обложке которой студенту следует разместить титульный лист, где указать номер работы, дисциплину, свои фамилию, имя, отчество, номер зачетной книжки, номер выполняемого варианта, ФИО рецензента и число сдачи контрольной работы на кафедру. Решения задач должно быть полным, развернутым, с приведением формул и формулировок теорем и фактов, использованных в решении, а также ссылок на использованную литературу. Все решения оформляются по плану: полная формулировка условия задачи, развернутое решение со всеми необходимыми пояснениями, ответ. В конце работы необходимо указать список использованной при выполнении работы литературы, поставить дату и свою подпись. В случае ошибок и недочетов, работа возвращается студенту для доработки и выполнения работы над ошибками. В работе над ошибками студент должен исправить отмеченные рецензентом ошибки, учесть его рекомендации и советы и выполнить задания без ошибок.

ИДЗ, допущенные к защите, возвращаются студенту для подготовки к зачету и к экзамену.

ИДЗ следует выполнять согласно присвоенному студенту варианту. Номер варианта равен сумме двух последних цифр шифра в зачетной книжке студента. Номера заданий к контрольной работе для каждого варианта даны в таблице.

Номер варианта	Номера заданий к ИДЗ		
	№1.	№2.	№3.
1	1,12,23,34,45,56,67,78,89,100	101,112,123,138,144,156,167,178,189	191,202,214,225,236,247
2	2,13,24,35,46,57,68,79,88,99	102,113,124,135,145,157.168,179,190	192,203,215,226,237,248
3	3,14,25,36,47,58,69,80,86,98	103,114,125,136,146,158,169.180,181	193,204,216,227,238,249
4	4,15,26,37,48,59,70,71,85,97	104,115,126,137,147,159,170,171,182	194,205,217,228,239,250
5	5,16,27,38,49,60,61,72,83,94	105,116,127,138,148,160,161,172,183	195,206,218,229,240,241
6	6,17,28,39,50,51,62,73,84,95	106,117,128,139,149,151,162,173,184	196,207,219,230,231,242
7	7,18,29,40,41,52,63,74,85,96	107,118,129,140,150,152,163,174,185	197,208.220,221,232,243
8	8,19,30,31,42,53,64,75,86,97	108,119,130,131,141,153,164,175,186	198,210,211,222,233,244
9	9,20,21,32,43,54,65,76,87,98	109,120,121,132,142,154,165,176,187	199.201.212,223,234,245
10	10,11,22,33.44,55,66,77,88,99	110,111,122,133,143,155,166,177,188	200,202,213,224,235,246
11	1,11,24,36,47,58,67,73,83,100	101,115,125,138,149,152,164,179,189	191,203,215,227,231,248
12	2,12,25,37,48,59,68,74,83,91	102,116,126,139,150,153,164,180,190	192,205,216,228,232,249
13	3,13,26,37,49,60,69,75,84,92	103,117,127,140.141,154,165,171,181	193,206,217,229,233,250
14	4,14,27,38,50,53,70,76,85,93	104,118,128,131,142,155,166,172,182	194,207,218,230,234,241
15	5,15,28,39,41,54,61,77,86,94	105,119,129,132,143.156,167,173,183	195,208,219,221,235,242
16	6,16,29,40,42,55,62,78,87,95	106,120,130,133,144,157,168,174,184	196,209,220,223,235,243
17	7,17,30,31,43,56,63,79,88,96	107,119,121,134,145,160,169,175,185	197,210,211,224,236,244
18	8,18,21,32,44,57,64,80,89,97	108,118,122,135,146,151,170,176,186	198,201,212,225,237,245
19	9,19,22,33,45,58,65,71,90,100	109,117,123,135,150,154,164,177,189	199,202,214,226,238,246

Если в процессе изучения материала или при решении той или иной задачи у студента возникают вопросы, на которые он не может ответить сам, то ему следует обратиться к ведущему преподавателю для получения консультации.

3 Примеры решения типовых задач

Задача 1. Вычислить определитель матрицы $\left(2A^T - 3B\right)\cdot B^T$, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение: Для этого запишем данную разность в виде суммы $2A^T + \left(-3B\right)$ и выполним действия последовательно:

$$A^T=\begin{pmatrix}2&3\\0&5\end{pmatrix},\ 2A^T=\begin{pmatrix}4&6\\0&10\end{pmatrix}, -3B=\begin{pmatrix}-3&-9\\-12&3\end{pmatrix},\ 2A^T+(-3B)=\begin{pmatrix}1&-3\\-12&13\end{pmatrix}.$$

Теперь находим $B^T=\begin{pmatrix}1&4\\3&-1\end{pmatrix}$. Вычисляем произведение матриц $2A^T-3B$ и B^T:

$$(2A^T-3B)\cdot B^T=\begin{pmatrix}1&-3\\-12&13\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&4\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1-3\cdot3&1\cdot4-3\cdot(-1)\\-12\cdot1+13\cdot3&-12\cdot4+13\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&7\\27&-61\end{pmatrix}.$$

Вычисляем определитель матрицы 2-го порядка

$$\left|(2A^T-3B)\cdot B^T\right|=\begin{vmatrix}-8&7\\27&-61\end{vmatrix}=-8\cdot(-61)-7\cdot27=299.$$

Задача 2. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases}x_1-2x_2-3x_3=8,\\3x_1+x_2+x_3=3,\\\quad-2x_2+x_3=6;\end{cases}$$

а) методом Крамера; б) методом Гаусса.

Решение: Метод Крамера. Выписываем матрицу коэффициентов системы и находим ее определитель

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&-3\\3&1&1\\0&-2&1\end{pmatrix},\ |A|=\begin{vmatrix}1&-2&-3\\3&1&1\\0&-2&1\end{vmatrix}=1+18+2+6=27.$$

Решение системы линейных уравнений по данным формулам называется методом Крамера. Вычисляем определители Δ_j:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}8&-2&-3\\3&1&1\\6&-2&1\end{vmatrix}=8+18-12+18+16+6=54,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&8&-3\\3&3&1\\0&6&1\end{vmatrix}=3-54-6-24=-81,\Delta_3=\begin{vmatrix}1&-2&8\\3&1&3\\0&-2&6\end{vmatrix}=6-48+6+36=0.$$

Находим искомые переменные:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{|A|}=\frac{54}{27}=2,\ x_2=\frac{\Delta_2}{|A|}=\frac{-81}{27}=-3,\ x_3=\frac{\Delta_3}{|A|}=\frac{0}{27}=0.$$

Метод Гаусса.

1. Прямой ход. Составим расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-3&8\\3&1&1&3\\0&-2&1&6\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-3&8\\0&7&10&-21\\0&-2&1&6\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-3&8\\0&7&10&-21\\0&0&27&0\end{array}\right).$$

2. Обратный ход. Выписываем систему линейных уравнений по полученной ступенчатой матрице:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 8, \\ \quad 7x_2 + 10x_3 = -21, \\ \qquad\quad 27x_3 = 0. \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим $x_3 = 0$ и подставляем это значение во второе уравнение. Получаем

$$7x_2 = -21 \text{ , откуда } x_2 = -3.$$

Подставляем значения $x_3 = 0$ и $x_2 = -3$ в первое уравнение, находим $x_1 = 2$. Итак, решением данной системы уравнений являются значения $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = 0$.

Задача 3. Найти указанные пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{3x^2-5x-2}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$; *г*) $\lim\limits_{x\to 2} (3x-5)^{\frac{4}{x-2}}$;

Решение: а) Непосредственная подстановка предельного значения аргумента $x=2$ приводит к неопределенности вида 0/0, чтобы раскрыть эту неопределенность, разложим числитель и знаменатель на множители и сократим члены дроби на общий множитель $(x-2)$. Так как аргумент x только стремиться к своему предельному значению 2, но не совпадает с ним, то множитель $(x-2)$ отличен от нуля при $x\to 2$:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{3x^2-5x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(3x+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+3}{3x+1} = \frac{5}{7}.$$

б) Непосредственная подстановка предельного значения аргумента $x=0$ приводит к неопределенности вида 0/0, чтобы раскрыть эту неопределенность, домножим числитель и знаменатель на сопряжённые выражения для числителя и знаменателя (чтобы применить формулу $(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2$).

Тогда $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(\sqrt{x^2+16}-4\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} =$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - 1^2\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(\left(\sqrt{x^2+16}\right)^2 - 4^2\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x^2+1-1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(x^2+16-16\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \frac{\left(\sqrt{0^2+16}+4\right)}{\left(\sqrt{0^2+1}+1\right)} = \frac{8}{2} = 4.$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{2\cdot\dfrac{x}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{2\cdot\dfrac{x}{2}}=2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}.$

Использовали первый замечательный предел $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$

г) При $x\to 2$ основание (3х–5) стремится к единице, а показатель степени $\dfrac{4}{x-2}$ стремится к бесконечности. Положим $3x-5=1+\alpha$, где $\alpha\to 0$ при $x\to 2$. Тогда $3x=6+\alpha$; $\quad x=2+\dfrac{\alpha}{3}$ и $x-2=\dfrac{\alpha}{3}$.

Выразив основание и показатель степени через α, получим

$$\lim_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{4}{x-2}}=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{12}{\alpha}}=\left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{12}=e^{12}.$$

Задача 4. Функция y задана различными аналитическими выражениями для различных областей изменения аргумента *x:*

$$y=\begin{cases} x+2, & \text{если } x\le -2;\\ x^2-4, & \text{если } -2<x\le 1;\\ 4-2x, & \text{если } x\ge 1.\end{cases}$$

Требуется: 1) найти точки разрыва функции, если они существуют; 2) найти предел функции y при приближении аргумента x к точке разрыва слева и справа; 3) сделать график функции.

Решение:

Данная функция определена и непрерывна в интервалах $(-\infty;\ -2)$, $(-2;\ 1)$, $(1;\ +\infty)$. При x = — 2 и x = 1 меняется аналитическое выражение функции, и только в этих точках функция может иметь разрыв.

Определим односторонние пределы в точке $x=-2$:

$\lim\limits_{x\to -2-0} y=\lim\limits_{x\to -2-0}(x+2)=-2+2=0;\qquad \lim\limits_{x\to -2+0} y=\lim\limits_{x\to -2+0}(x^2-4)=(-2)^2-4=0.$

Односторонние пределы совпадают. Функция в этой точке непрерывна.

Определим односторонние пределы в точке $x=1$:

$\lim\limits_{x\to 1-0} y=\lim\limits_{x\to 1-0}\left(x^2-4\right)=1-4=-3;\qquad \lim\limits_{x\to 1+0} y=\lim\limits_{x\to 1+0}\left(4-2x\right)=4-2=$

Так как односторонние пределы функции y в точке $x=1$ не равны между собой, то в этой точке функция имеет разрыв первого рода.

График данной функции изображен на рисунке 1.

Задача 5. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$ следующих функций:

а) $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{4x-1}{4x+1}}$; б) $y=(x+1)^{\operatorname{arctg} x}$; в) $\cos(xy)-\dfrac{x}{y}=0$; г) $\begin{cases} x=a\cos t+(at+b)\sin t,\\ y=a\sin t-(at+b)\cos t\end{cases}$

Решение: При нахождении производных функций используем правила дифференцирования и таблицу производных основных элементарных функций.

а) Пользуясь правилом логарифмирования корня и дроби, преобразуем правую часть:

$$y=\frac{1}{4}\left[\ln(4x-1)+\ln(4x+1)\right];$$

Применяя правила и формулы дифференцирования, получим:

$$y'=\frac{1}{4}\left[\frac{4}{4x-1}-\frac{4}{4x+1}\right]=\frac{1}{4x-1}-\frac{1}{4x+1}=\frac{2}{16x^2-1}.$$

б) Предварительно прологарифмируем по основанию e обе части равенства:

$$\ln y=\operatorname{arctg}x\cdot\ln(x+1).$$

Теперь дифференцируем обе части, считая $\ln y$ сложной функцией от переменной x:

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{1+x^2}\ln(x+1)+\operatorname{arctg}x\frac{1}{x+1}=\frac{\ln(x+1)}{1+x^2}+\frac{\operatorname{arctg}x}{x+1},$$

откуда $$y'=(x+1)^{\operatorname{arctg}x}\cdot\left[\frac{\ln(x+1)}{1+x^2}+\frac{\operatorname{arctg}x}{x+1}\right].$$

в) В данном случае зависимость между аргументом x и функцией y задана уравнением, которое не разрешено относительно функции y. Чтобы найти производную y', следует дифференцировать по x обе части заданного уравнения, считая при этом y функцией от x, а затем полученное уравнение решить относительно искомой производной y'. Имеем

$$-\sin(xy)(y+xy')-\frac{y-xy'}{y^2}=0.$$

Из полученного равенства, связывающего x, y и y', находим производную y':

$$-y^3\sin(xy)-xy^2y'\sin(xy)-y+xy'=0,$$

$$y'\left[x-xy^2\sin(xy)\right]=y+y^3\sin(xy),$$

откуда

$$y'=\frac{y+y^3\sin(xy)}{x-xy^2\sin(xy)}=\frac{y\left[1+y^2\sin(xy)\right]}{x\left[1-y^2\sin(xy)\right]}.$$

г) Зависимость между переменными x и y задана параметрическими уравнениями. Чтобы найти искомую производную y', находим предварительно дифференциалы dy и dx и затем берем отношение этих дифференциалов

$$dx=\left[-a\sin t+a\sin t+(at+b)\cos t\right]\,dt=(at+b)\cos t\,\,dt;$$

$$dy=\left[a\cos t-a\cos t+(at+b)\sin t\right]\,dt=(at+b)\sin t\,\,dt;$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(at+b)\sin t\,\,dt}{(at+b)\cos t\,\,dt}=\operatorname{tg}t.$$

Задача 6. Найти производную второго порядка $y''=\dfrac{d^2y}{d\,x^2}$.

а) $\sqrt{4y+3}-x^2+2x-5=0$; б) $x = 2\cos^3 t;\quad y = 6\sin^3 t$.

Решение: а) Функция y задана в неявном виде. Дифференцируем по x обе части заданного уравнения, считая при этом y функцией от x:

$\dfrac{4y'}{2\sqrt{4y+3}}-2x+2=0$, откуда $y'=(x-1)\sqrt{4y+3}$.

Снова дифференцируем по x обе части (1):

$$y''=\sqrt{4y+3}+(x-1)\frac{4y'}{2\sqrt{4y+3}}.$$

Заменив y' в правой части, получим

$$y''=\sqrt{4y+3}+2(x-1)^2.$$

б) Зависимость между переменными x и y задана параметрическими уравнениями. Чтобы найти производную y', находим сначала дифференциалы dy и dx, а затем берем их отношение:

$$dy=18\sin^2 t\cos t\,dt;\qquad dx=-6\cos^2 t\sin t\,dt.$$

Тогда

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{18\sin^2 t\cos t\,dt}{-6\cos^2 t\sin t\,dt}=-3\operatorname{tg} t.$$

Производная второго порядка $y''=\dfrac{dy'}{dx}$. Следовательно, чтобы найти y'', надо найти дифференциал dy':

$$dy'=-\frac{3\,dt}{\cos^2 t}.$$

Тогда $y''=-\dfrac{3\,dt}{\cos^2 t}:(-6\cos^2 t\sin t\,dt)=\dfrac{dt}{2\cos^4 t\sin t\,dt}=\dfrac{1}{\sin 2t\cos^3 t}$.

Задача 7. Исследовать функцию $y=\ln\left(x^2-6x+10\right)$ и построить ее график.

Решение:

1. Определим область существования функции. Квадратный трехчлен, стоящий под знаком логарифма, можно представить так: $x^2-6x+10=(x-3)^2+1$. Как видно, под знаком логарифма будет положительное число при любом значении аргумента x. Следовательно, областью существования данной функции служит вся числовая ось.

2. Исследуем функцию на непрерывность. Функция всюду непрерывна и не имеет точек разрыва.

3. Установим четность и нечетность функции. Так как $y(-x)\neq y(x)$ и $y(-x)\neq -y(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной.

4. Исследуем функцию на экстремум. Находим первую производную:

$$y'(x)=\frac{2x-6}{x^2-6x+10}.$$

Знаменатель $x^2-6x+10>0$ для любого значения *x*. Как видно, при $x<3$ первая производная отрицательна, а при $x>3$ положительна. При $x = 3$ первая производная меняет свой знак с минуса на плюс. В этой точке функция имеет минимум:

$$y_{мин}=y(3)=\ln 1=0.$$

Итак, *A(3; 0)* — точка минимума. Функция убывает на интервале $(-\infty;3)$ и возрастает на интервале $(3;+\infty)$.

5. Определим точки перегиба графика функции и интервалы выпуклости и вогнутости кривой. Для этого находим вторую производную:

$$y''(x)=\frac{2(x^2-6x+10)-(2x-6)(2x-6)}{(x^2-6x+10)^2}=\frac{-2(x-6)(x-4)}{(x^2-6x+10)^2}.$$

Разобьем всю числовую ось на три интервала: $(-\infty;2)$, $(2;4)$, $(4;+\infty)$. Как видно, в первом и третьем интервалах вторая производная отрицательна, а во втором интервале положительна. При $x_1 = 2$ и $x_2 = 4$ вторая производная меняет свой знак. Эти значения аргумента являются абсциссами точек перегиба. Определим ординаты точек:

$$y_1=y(2)=\ln 2; \quad y_2=y(4)=\ln 2.$$

Следовательно, $P_1(2;\ln 2)$ и $P_2(4;\ln 2)$— точки перегиба графика функции. График является выпуклым в интервалах $(-\infty;2)$ и $(4;+\infty)$, и вогнутым в интервале (2, 4).

6. Определим уравнения асимптот графика функции. Для определения уравнения невертикальной асимптоты $y=kx+b$ воспользуемся формулами: $\kappa=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}$; $b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-\kappa\cdot x)$.

Имеем $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2-6x+10)}{x}=\frac{\infty}{\infty}$.

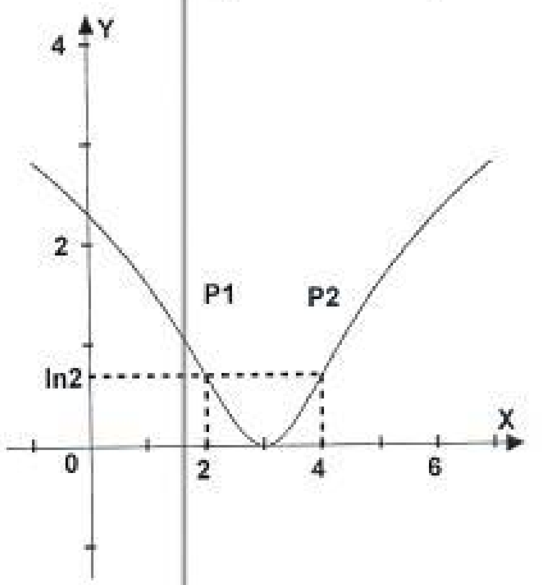

Рисунок 1

Чтобы найти искомый предел, дважды применяем правило Лопиталя:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x-6}{x^2-6x+10}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-6}{x^2-6x+10}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2x-6}=\frac{2}{\infty}=0.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\ln(x^2-6x+10)-0\right)=\lim_{x\to\infty}\ln(x^2-6x+10)=\ln(\infty)=\infty$$

Итак, кривая не имеет асимптот. График исследуемой функции показан на рисунке 1.

Задача 8. Исследовать на экстремум функцию $z=-4+6x-x^2-xy-y^2$.

Решение: Находим стационарные точки заданной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=6-2x;\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-x-2y.$$

Решение системы $\begin{cases}6-2x-y=0,\\ -x-2y=0,\end{cases}$ дает $x_0=4,\quad y_0=-2$.

Следовательно, данная функция имеет только одну стационарную точку $P_0(4;-2)$.

Находим частные производные второго порядка и их значения в найденной стационарной точке:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2;\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-1;\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2.$$

Как видно, частные производные второго порядка не содержат x и y, они постоянны в любой точке и, в частности, в точке $P_0(4;-2)$. Имеем $A=-2$; $B=-1$; $C=-2$.

$$\Delta=\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -1 & -2\end{vmatrix}=-2\cdot(-2)-(-1)\cdot(-1)=4-1=3>0.$$

Так как $\Delta>0$, и $A<0$, то в точке $P_0(4;-2)$ данная функция имеет максимум: $z_{\max}=z(4;-2)=-4+6\cdot4-4^2-4\cdot(-2)-(-2)^2=-4+24-16+8-4=8$.

Задача 9. Написать уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к поверхности $3xy^2-2yz+4xz-4=0$ в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$, если $x_0=-1,\quad y_0=2$.

Решение: Определим аппликату z_0 точки касания, для этого подставляем значения x_0 *и* y_0 в данное уравнение поверхности:

$$3(-1)2^2-2\cdot2z_0+4(-1)z_0-4=0;\qquad -8z_0=16;\qquad z_0=-2.$$

Таким образом, $M_0(-1;2;-2)$–точка касания. Уравнение касательной плоскости, проведенной к поверхности $F(x,y,z)=0$ в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$, имеет вид:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{M_0}(x-x_0)+\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{M_0}(y-y_0)+\left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]_{M_0}(z-z_0)=0.$$

Нормаль проходит через точку касания и перпендикулярна касательной плоскости. Уравнения нормали имеют вид:

$$\frac{x-x_0}{\left[\dfrac{\partial F}{\partial x}\right]_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left[\dfrac{\partial F}{\partial y}\right]_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\left[\dfrac{\partial F}{\partial z}\right]_{M_0}}.$$

Находим частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ и вычисляем их значения в точке касания $M_0(-1;2;-2)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=3y^2+4x;\quad \frac{\partial F}{\partial y}=6xy-2z;\quad \frac{\partial F}{\partial z}=-2y+4x;$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{M_0}=3\cdot 2^2+4\cdot(-2)=12-8=4;\quad \left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{M_0}=6\cdot(-1)\cdot 2-2\cdot(-2)=-12+4=-8;$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]_{M_0}=-2\cdot 2+4\cdot(-1)=-4-4=-8.$$

Подставив найденные значения частных производных и координаты точки касания, получаем:

$4(x+1)-8(y-2)-8(z+2)=0,$

или после упрощения

$x-2y-2z+1=0$ — уравнение касательной плоскости.

Из (2) имеем

$\frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{-8}=\frac{z+2}{-8}$, или $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+2}{-2}$ — искомые уравнения нормали.

Задача 10. Найдите неопределенный интеграл

$\int x(x^2+1)^{3/2}\,dx.$

Решение: В случае, если интеграл имеет вит вид $\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx$ выполняют замену переменной:

$$\left\{t=\varphi(x);\quad dt=\varphi'(x)dx\right\}.$$

Тогда интеграл примет более простой вид: $\int f(t)dt$. Заметим, что в данном задании интеграл находится также с помощью метода замены переменной:

$$\left\{t=x^2+1;\quad dt=2xdx;\quad dx=\frac{dt}{2x}\right\}.$$

Получим

$$\int x(x^2+1)^{3/2}dx=\int t^{3/2}\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int t^{3/2}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2}+C=\frac{t^{5/2}}{5}+C=\frac{(x^2+1)^{5/2}}{5}+C.$$

Задача 11. Вычислить площадь поверхности эллипсоида, полученного вращением вокруг оси Ox эллипса:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1.$$

Решение: Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y = f(x)$ между точками с абсциссами $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле

$$S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$

Из уравнения эллипса находим $y=\dfrac{\sqrt{8-2x^2}}{2}$.

Производная $y'=-\dfrac{x}{\sqrt{8-2x^2}}$. Используя формулу объема, получим

$$S=2\pi\int_{-2}^{2}\frac{\sqrt{8-2x^2}}{2}\sqrt{1+\frac{x^2}{8-2x^2}}\,dx=2\pi\int_0^2\sqrt{8-x^2}\,dx$$

Чтобы вычислить последний интеграл, положим $x=2\sqrt{2}\sin z$. Тогда $z = 0$ при $x = 0$ и $z=\pi/4$ при $x = 2$.

$$S=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{8-8\sin^2 z}\,2\sqrt{2}\cos z\,dz = 16\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 z\,dz = 8\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2z)\,dz =$$

$$= 8\pi\left[z+\frac{\sin 2z}{2}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\pi^2+4\pi\approx 32{,}3 \text{ кв.ед.}$$

Задача 12. Дан интеграл $\iint\limits_D dxdy=\int_1^3 dx\int_{(x-1)^2+1}^{2x-1}dy.$

Требуется:
1) построить на плоскости xOy область интегрирования D;
2) изменить порядок интегрирования;
3) вычислить площадь области D при заданном и измененном порядке интегрирования.

Решение:

1. Пределы внешнего интеграла по переменной x — числа 1 и 3 — указывают на то, что область D ограничена слева прямой $x = 1$ и справа прямой $x = 3$.

Пределы внутреннего интеграла по переменной y указывают на то, что область D ограничена снизу параболой $y=(x-1)^2+1$ и сверху прямой $y=2x-1$. Построив эти линии на

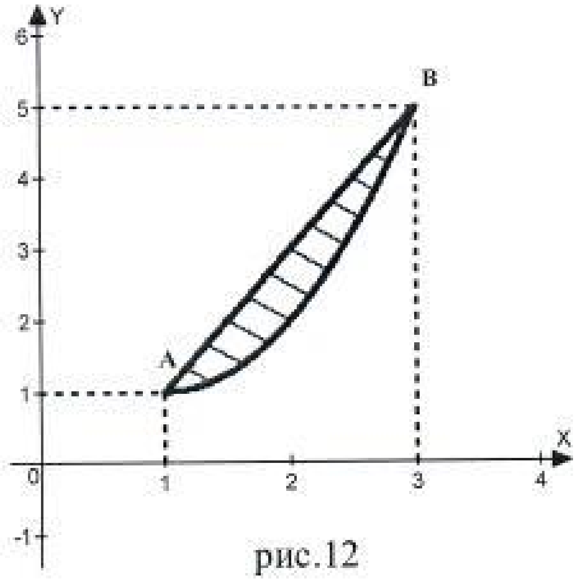

рис.12

отрезке [1; 3], получим область D (рис. 2).

2. Чтобы изменить порядок интегрирования, установим пределы интегрирования для внешнего интеграла по переменной *y.* Как видно из рис. 2 наименьшее значение, которое принимает y в области D, равно 1 в точке *A(1; 1),* а наибольшее значение равно 5 в точке *B(3; 5).* Следовательно, внешний интеграл по переменной y будет иметь пределы: 1 (нижний предел) и 5 (верхний предел).

Определим пределы для внутреннего интеграла по переменной x.

Из уравнения прямой $y=2x-1$ получаем $\tilde{o}=\dfrac{\acute{o}+1}{2}$ нижний предел.

Из уравнения параболы $y=(x-1)^2+1$ получаем $\tilde{o}=\sqrt{\acute{o}-1}+1$ – верхний предел. Таким образом,

$$\iint\limits_D dxdy=\int_1^3 dx\int_{(x-1)^2+1}^{2x-1}dy=\int_1^5 dy\int_{\frac{y+1}{2}}^{\sqrt{y-1}+1}dx.$$

3. Вычислим площадь области D при заданном порядке интегрирования:

$$S_D=\int_1^3 dx\int_{(x-1)^2+1}^{2x-1}dy=\int_1^3 dx\left[y\right]_{(x-1)^2+1}^{2x-1}=\int_1^3(2x-1-(x-1)^2-1)dx=$$

$$=\int_1^3 2(x-1)dx-\int_1^3(x-1)^2dx=\left[(x-1)^2\right]_1^3-\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_1^3=4-0-\frac{8}{3}+0=\frac{4}{3}.$$

4. Вычислим площадь области D при измененном порядке интегрирования:

$$S_D=\int_1^5 dy\int_{\frac{y+1}{2}}^{\sqrt{y-1}+1}dx=\int_1^5 dy\left[x\right]_{\frac{y+1}{2}}^{\sqrt{y-1}+1}=\int_1^5(\sqrt{y-1}+1-\frac{y+1}{2})dy=$$

$$=\int_1^5\sqrt{y-1}dy-\frac{1}{2}\int_1^5(y-1)dy=\left[\frac{2}{3}(y-1)\sqrt{y-1}\right]_1^5-\left[\frac{(y-1)^2}{4}\right]_1^5=\frac{16}{3}-0-4+0=\frac{4}{3}.$$

Задача 13. Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения $yy'=\dfrac{-2x}{\cos y}$.

Решение: Преобразуем уравнение, учитывая, что $y'=\dfrac{dy}{dx}$. Тогда уравнение примет вид

$$y\cos ydy=-2xdx,$$

проинтегрируем обе части, получим

$$\int y\cos ydy=-2\int xdx.$$

Интеграл, стоящий в левой части, берется по частям.

$$\int y\cos ydy=\left\{\begin{matrix}u=y; & dv=\cos ydy;\\ du=dy; & v=\sin y\end{matrix}\right\}=y\sin y-\int\sin ydy=y\sin y+\cos y$$

Тогда уравнение примет вид:

$$y\sin y + \cos y + x^2 + C = 0$$

Полученное равенство называется общим интегралом исходного дифференциального уравнения.

Задача 14. Вычислить интеграл $\int_0^{1/2} \frac{\sin 2x}{x}dx$ с точностью до 0,001.

Решение: Предварительно представим подынтегральную функцию в виде степенного ряда. Используя известное разложение в степенной ряд Маклорена функции sinx, имеем:

$\sin 2x = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \ldots$, тогда $\quad \frac{\sin 2x}{x} = 2 - \frac{2^3x^2}{3!} + \frac{2^5x^4}{5!} - \frac{2^7x^6}{7!} + \ldots$

$$\int_0^{1/2}\frac{\sin 2x}{x}dx = \int_0^{1/2}\left(2 - \frac{2^3x^2}{3!} + \frac{2^5x^4}{5!} - \frac{2^7x^6}{7!} + \ldots\right)dx = \left(2x - \frac{2^3x^3}{3!\cdot 3} + \frac{2^5x^5}{5!\cdot 5} - \frac{2^7x^7}{7!\cdot 7} + \ldots\right)\Bigg|_0^{1/2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{3!\cdot 3} + \frac{1}{5!\cdot 5} - \frac{1}{7!\cdot 7} + \ldots = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \frac{1}{35280} + \ldots$$

Мы получили знакочередующийся ряд, который удовлетворяет условиям теоремы Лейбница. Так как в полученном ряде четвертый член по абсолютному значению меньше 0,001, то ограничиваемся только первыми тремя членами.

$$\int_0^{1/2}\frac{\sin 2x}{x}dx \approx 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} \approx 1 - 0.0556 + 0.0017 \approx 0.946$$

Задача 15. Решить систему уравнений и выделить частные решения, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 6y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3t + 0,5 \end{cases}, \; x(0) = 1, \; y(0) = -1.$$

Решение: Обе части первого уравнения системы продифференцируем по переменной t :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 6\frac{dy}{dt}.$$

В полученном уравнении заменим $\frac{dy}{dt}$ правой частью второго уравнения системы. В результате получим неоднородное линейное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 6x = 18t + 3\ .$$

Составим и решим соответствующее однородное линейное уравнение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 6x = 0\ .$$

Характеристическое уравнение $k^2 - k - 6 = 0$ имеет корни: $k_1 = -2$, $k_2 = 3$. Следовательно, общее решение имеет вид

$$x_{\text{ìàì}} = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t}.$$

Находим частное решение $x = At + B$. Дважды дифференцируя, получим $(x)' = A$, $(x)'' = 0$. Подставив в уравнение, находим $A = -3$ è $B = 0$. Следовательно, $x = -3t$ и $x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t} - 3t$.

Из первого уравнения системы находим, что $6y = \frac{dx}{dt} - x$, или $6y = -2C_1 e^{-2t} + 3C_2 e^{3t} - 3 - C_1 e^{-2t} - C_2 e^{3t} + 3t$, откуда $6y = -3C_1 e^{-2t} + 2C_2 e^{3t} + 3t - 3$.

Подставив начальные условия в (3) и (4), получим систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ 3C_1 - 2C_2 = 3. \end{cases}$$

Решение этой системы дает $C_1 = 1$ и $C_2 = 0$. Следовательно,

$x = e^{-2t} - 3t$ и $y = -\frac{1}{2}(e^{-2t} - t + 1)$ – частные решения, удовлетворяющие заданным начальным условиям.

Задача 16. Решить дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами $x'' + 4x = 2$ с начальными условиями $x(0) = x'(0) = 0$.

Решение: Обозначим изображение искомой функции $X(p)$. Тогда согласно свойству дифференцирования оригинала получаем

$$x''(t) \risingdotseq p^2 X(p) - (px(0) + x'(0)) = p^2 X(p).$$

Тогда в силу свойства линейности левая часть данного дифференциального уравнения имеет следующее изображение

$$x'' + 4x \risingdotseq p^2 X(p) + 4X(p).$$

Находим теперь изображение правой части уравнения:

$$f(t) = 2 \risingdotseq \frac{2}{p}.$$

Получаем операторное уравнение

$$p^2 X(p) + 4X(p) = \frac{2}{p},$$

из которого выражаем функцию $X(p)$

$$X(p) = \frac{2}{p(p^2 + 4)}.$$

Решением исходного дифференциального уравнения является оригинал, восстановленный по найденному изображению $X(p)$. Для этого разложим дробь на простейшие дроби методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{2}{p(p^2 + 4)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + 4} = \frac{(A + B)p^2 + Cp + 4A}{p(p^2 + 4)}.$$

Неопределенные коэффициенты находим из следующей системы линейных уравнений

$$\begin{cases} A+B=0, \\ C=0, \\ 4A=2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0{,}5, \\ B=-0{,}5, \\ C=0. \end{cases}$$

Итак, получаем следующий оригинал, который является решением исходного дифференциального уравнения:

$$X(p)=\frac{2}{p(p^2+4)}=\frac{0{,}5}{p}+\frac{0{,}5p}{p^2+4} \risingdotseq 0{,}5+0{,}25\cos 2t=x(t).$$

Задача 17. Всхожесть семян данного растения составляет 90 %. Найти вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут: а) четыре; б) не менее четырех.

Решение: Воспользуемся формулой Бернулли. Если производится n независимых испытаний, при каждом из которых вероятность осуществления событий A постоянна и равна p, а вероятность противоположного события $q=1-p$, то вероятность $P_n(m)$ того, что при этом событие A осуществляется ровно m раз, вычисляется по формуле:

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m} \ ,$$

где C_n^m – есть число сочетаний из n элементов по m.

а) По условию задачи вероятность всхожести семян p=0,9; тогда q= 0,1; в данном случае n=5 и m = 4. Подставляя эти данные в формулу Бернулли, получим

$$P_5(4)=C_5^4(0{,}9)^4(0{,}1)=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}0{,}656\cdot0{,}1=0{,}328.$$

б) Искомое событие A состоит в том, что из пяти посеянных семян взойдут или четыре, или пять. Таким образом, $P(A)=P_5(4)+P_5(5)$. Первое слагаемое уже найдено. Для вычисления второго снова применяем формулу Бернулли:

$$P_5(5)=C_5^5(0{,}9)^5(0{,}1)^0=1\cdot0{,}591\cdot1=0{,}591.$$

Следовательно, $P(A)$ =0,328 +0,591 = 0,919.

Задача 18. Вероятность попадания в цель при отдельном выстреле равна 0,6. Найти вероятность того, что число попаданий при 600 выстрелах будет заключено в пределах от 330 до 375.

Решение:

По условию n = 600, p=0,6, m_1= 330, m_2=375. Находим

$$\alpha=\frac{330-600\cdot0{,}6}{\sqrt{600\cdot0{,}6\cdot0{,}4}}=-2{,}5, \qquad \beta=\frac{375-600\cdot0{,}6}{\sqrt{600\cdot0{,}6\cdot0{,}4}}=1{,}25.$$

По таблицам значений находим $\Phi(1,25) = 0,3944$; $\Phi(-2,5) = -\Phi(2,5) = = -0,4938$. Согласно интегральной теореме Лапласа получим искомую вероятность:

$$P_{600}(300 \le m \le 375) \approx \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = 0,3944 - (-0,4938) = 0,8882.$$

Задача 19. Задан закон распределения случайной величины X (в первой строке таблицы даны возможные значения величины X, а во второй строке указаны вероятности p этих возможных значений).

X	13	15	18	20
P	0.2	0.1	0.4	0.3

Найти: 1) математическое ожидание $M(x)$; 2) $D(x)$; 3) среднее квадратическое отклонение σ.

Решение: 1) Математическое ожидание $M(x)$ вычислим по формуле: $M(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$. Тогда имеем: $M(x)=13\cdot 0,2+15\cdot 0,1+18\cdot 0,4+20\cdot 0,3=17,3$

2) Для вычисления дисперсии $D(x)$ воспользуемся формулой:

$D(x)=M(x^2)-(M(x))^2$.

Сначала вычислим $M(x^2)$:

$M(x^2)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i=13^2\cdot 0,2+15^2\cdot 0,1+18^2\cdot 0,4+20^2\cdot 0,3=305,9$. Тогда получим:

$D(x)=305,9-(17,3)^2=6,61$

3) Среднее квадратическое отклонение σ: $\sigma(x)=\sqrt{D(x)}$. Т.е. $\sigma(x)=\sqrt{6,61}\approx 2,57$.

4 Задания к ИДЗ

ИДЗ 1

Задание № 1. Для данных матриц A и B найдите обратную матрицу к матрице $C = 2A-3B$.

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.	**2.** $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$
3. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.	**4.** $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&-1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&6&0\\2&4&-6\\1&2&-3\end{pmatrix}$.	**6.** $A=\begin{pmatrix}-6&1&11\\9&2&5\\0&3&7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&2&7\\1&-3&2\end{pmatrix}$.
7. $A=\begin{pmatrix}3&1&2\\-1&0&2\\1&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-1&2\\2&1&1\\3&7&1\end{pmatrix}$.	**8.** $A=\begin{pmatrix}2&3&2\\1&3&-1\\4&1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&2&-1\\3&1&2\\5&3&0\end{pmatrix}$.
9. $A=\begin{pmatrix}6&7&3\\3&1&0\\2&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0&5\\4&-1&-2\\4&3&7\end{pmatrix}$.	**10.** $A=\begin{pmatrix}-2&3&4\\3&-1&-4\\-1&2&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&3&1\\0&6&2\\1&9&2\end{pmatrix}$.

Задание № 2. Для данной системы линейных уравнений:

1) запишите систему в матричной форме,
2) найдите ее решение методом Гаусса,
3) найдите ее решение методом Крамера.

11. $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=6,\\2x_1+2x_2-3x_3=0,\\2x_1+x_2+2x_3=2.\end{cases}$	**16.** $\begin{cases}x_1+x_2+3x_3=-2,\\2x_1-3x_2-x_3=3,\\3x_1+2x_2+2x_3=1.\end{cases}$
12. $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=4,\\2x_1-x_2+3x_3=-7,\\3x_1-3x_2-2x_3=1.\end{cases}$	**17.** $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=1,\\2x_1-3x_2-x_3=-4,\\3x_1+x_2+2x_3=1.\end{cases}$
13. $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=3,\\x_1+x_2-2x_3=-3,\\2x_1-3x_2-x_3=0.\end{cases}$	**18.** $\begin{cases}x_1+4x_2-3x_3=-7,\\x_1-3x_2+2x_3=0,\\2x_1-5x_2-x_3=-1.\end{cases}$
14. $\begin{cases}x_1+2x_2+5x_3=-1,\\x_1+x_2+2x_3=0,\\3x_1-x_2-3x_3=1.\end{cases}$	**19.** $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=1,\\2x_1+3x_2-x_3=8,\\x_1-x_2+2x_3=-1.\end{cases}$
15. $\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=-1,\\x_1+2x_2+3x_3=0,\\4x_1+5x_2-2x_3=-3.\end{cases}$	**20.** $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=1,\\2x_1-3x_2-2x_3=-3,\\2x_1+x_2+x_3=2.\end{cases}$

Задание № 3 . По координатам вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ найти: 1) длины ребер A_1A_2 и A_1A_3; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3; 3) площадь грани $A_1A_2A_3$; 4) объем пирамиды; 5) высоту пирамиды, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$; 6) составить уравнение плоскости $A_1A_2A_4$; 7) найти расстояние от точки A_3 до плоскости $A_1A_2A_4$.

21. $A_1(2;-1;2), A_2(1;-1;6), A_3(0;0;2), A_4(2;1;4)$.

22. $A_1(0;3;2), A_2(-1;3;6), A_3(-2;4;2), A_4(0;5;4)$.

23. $A_1(-1;2;0), A_2(-2;2;4), A_3(-3;3;0), A_4(-1;4;2)$.

24. $A_1(2;2;3), A_2(1;2;7), A_3(0;3;3), A_4(2;4;5)$.

25. $A_1(0;-1;2), A_2(-1;-1;6), A_3(-2;0;2), A_4(0;1;4)$.

26. $A_1(3;0;2), A_2(2;0;6), A_3(1;1;2), A_4(3;2;4)$.

27. $A_1(0;2;-1), A_2(-1;2;3), A_3(-2;3;7), A_4(0;4;1)$.

28. $A_1(2;3;2), A_2(1;3;6), A_3(0;4;2), A_4(2;5;4)$.

29. $A_1(-1;0;2), A_2(-2;0;6), A_3(-3;1;2), A_4(-1;2;4)$.

30. $A_1(2;0;3), A_2(1;0;7), A_3(0;1;3), A_4(2;2;5)$.

Задание № 4. Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, в некотором базисе. Требуется:

1) найти угол между векторами $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{c}$;

2) проверить компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$;

3) найти проекцию вектора $\vec{a}-\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$.

31. $\vec{a}(7;2;1)$, $\vec{b}(4;3;5)$, $\vec{c}(3;4;-2)$.

32. $\vec{a}(1;2;3)$, $\vec{b}(-1;3;2)$, $\vec{c}(7;-3;5)$.

33. $\vec{a}(4;7;8)$, $\vec{b}(9;1;3)$, $\vec{c}(2;-4;1)$.

34. $\vec{a}(8;2;3)$, $\vec{b}(4;6;10)$, $\vec{c}(3;-2;1)$.

35. $\vec{a}(10;3;1)$, $\vec{b}(1;4;2)$, $\vec{c}(3;9;2)$.

36. $\vec{a}(2;4;1)$, $\vec{b}(1;3;6)$, $\vec{c}(5;3;1)$.

37. $\vec{a}(1;7;3)$, $\vec{b}(3;4;2;)$, $\vec{c}(4;8;5)$.

38. $\vec{a}(1;-2;3)$, $\vec{b}(4;7;2)$, $\vec{c}(6;4;2)$.

39. $\vec{a}(1;4;3)$, $\vec{b}(6;8;5)$, $\vec{c}(3;1;4)$.

40. $\vec{a}(2;7;3)$, $\vec{b}(3;1;8)$, $\vec{c}(2;-7;4)$.

Задание № 4. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

41. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1+x}}{2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$.

42. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+3x^2-x}{2x+3x^2-3x}$;

2) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{5-x}-1}{x-4}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{4x}$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{x}$.

43. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x}{3x-2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{5x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^x$.

44. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2}{x^2-x-6}$;

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{6x+1}-5}{x-4}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{\cos x-\cos^3 x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)^{\frac{3}{2x}}$.

45. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{2x^3+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2x-5}-3}{x-7}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{5x}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x}\right)^x$.

46. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+2}{2x^2+3x-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{2x-10}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-1}{3x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{4}{5x}}$.

47. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2}{1-\cos^2 x}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$.

48. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-4x+8}{2x^2-3x-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sqrt{1+x}-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{5x}$;

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1+3x}{3x}\right)^x$.

49. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x-6}{2x^2-x+2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\operatorname{tg} x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{4}{x}}$.

50. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-4x^2+2}{6x+2x^2-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sqrt{x+25}-5}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-2\cos^2 x}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$.

Задание № 6. Найти производные первого порядка данных функций.

51. 1) $y=\sin x-x\cos x$;

2) $y=\sqrt{\lg(1-3x)}$;

3) $y=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{e^x}{x}\right)$;

52. 1) $y=\dfrac{x^3+1}{3x-2}$;

2) $y=e^{x\cos x}+7x$;

3) $y=\arccos(l\,g\,x)$;

53. 1) $y=\frac{3x-4}{\sqrt{x}}$;

2) $y=\left(e^{\cos x}+3\right)^2$;

3) $y=\ln\sin(2x+5)+\arccos x$;

54. 1) $y=\frac{x^2}{\ln x}$;

2) $y=e^{\operatorname{tg} x}\cos x$;

3) $y=2^{\arcsin 3x}-\sqrt{x}$;

55. 1) $y=\frac{4\sin x}{3^x}$;

2) $y=x^2+\sqrt{1-x^2}$;

3) $y=\operatorname{arctg} e^{2x}$;

56. 1) $y=\frac{\cos x}{5x^5}$;

2) $y=\arcsin(\operatorname{tg} x)$;

3) $y=\ln\sqrt{1+e^{2x}}-2x$;

57. 1) $y=\frac{1+x^2}{1-x}$;

2) $y=\frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x}$;

3) $y=\arcsin\sqrt{1-3x}-\ln x$;

58. 1) $y=\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$;

2) $y=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}+\ln x$;

3) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$;

59. 1) $y=\frac{3+6x}{3-4x}$;

2) $y=3^{\operatorname{tg} x+7x}$;

3) $y=arctg\sqrt{2x+1}$;

60. 1) $y=\frac{\sin x}{1+\operatorname{tg} x}$;

2) $y=\operatorname{arctg} e^{3x}-4\sqrt{x}$;

3) $y=\log_2\left(1+3x^3\right)$;

Задание №7. Исследовать данные функции методами дифференциального исчисления и начертить их графики. Исследование и построение графика рекомендуется проводить по следующей схеме: 1) найти область существования функции; 2) исследовать функцию на непрерывность; найти точки разрыва функции и ее односторонние пределы в точках разрыва; 3) выяснить, не является ли данная функция четной, нечетной; 4) найти точки экстремума функции и определить интервалы возрастания и убывания функции; 5) найти точки перегиба графика функции и определить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции; 6) найти асимптоты графика функции, если они имеются; 7) построить график функции, используя результаты исследования; при необходимости можно дополнительно находить точки графика, давая аргументу x ряд значений и вычисляя соответствующие значения y.

61. $y=\frac{x^3-32}{x^2}$.	**62.** $y=\frac{2x^2}{2x-1}$.
63. $y=\frac{1-2x^3}{x^2}$	**64.** $y=\frac{x^3}{(x-1)^2}$.
65. $y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x^2}$.	**66.** $y=\frac{4x^2}{3+x^2}$

67. $y=\dfrac{4-x^2}{x^2}$.	**68.** $y=\dfrac{x^2}{2(x-1)}$.
69. $y=\dfrac{8x}{(x-2)^2}$.	**70.** $y=\dfrac{4x}{(x+1)^2}$

Задание № 8. Найти неопределенные интегралы.

71. 1) $\int\frac{\cos x dx}{4+\sin x}$;

2) $\int 2x e^{3x}\,dx$;

3) $\int\frac{(x+2)dx}{x^2+5x+4}$;

72. 1) $\int 2x\sqrt{3+x^2}\,dx$;

2) $\int e^x(3x-1)dx$;

3) $\int\frac{x+1}{x^2+3x+2}dx$.

73. 1) $\int e^{1+\sin x}\cos x dx$;

2) $\int x\sin 2x dx$;

3) $\int\frac{3x+4}{x^2+x-2}dx$;

74. 1) $\int\frac{\sqrt{2+\ln x}}{x}dx$;

2) $\int 2x e^{-x}\,dx$;

3) $\int\frac{2x}{x^2-x-6}dx$;

75. 1) $\int\frac{2x dx}{(x^2+4)^2}$;

2) $\int 3x e^{-3x}dx$;

3) $\int\frac{3x+1}{x^2+2x-8}dx$;

76. 1) $\int\frac{\arcsin x-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

2) $\int(x+3)e^x dx$;

3) $\int\frac{x+2}{x^2+3x-4}dx$;

77. 1) $\int\frac{4x^3dx}{\sqrt{1-x^4}}$;

2) $\int x3^x\,dx$;

3) $\int\frac{(3x-7)dx}{x^2+4x+3}$;

78. 1) $\int\frac{\sin x dx}{\cos x+3}$;

2) $\int xe^{3x}dx$;

3) $\int\frac{2x-1}{x^2-6x+5}dx$;

79. 1) $\int\frac{(3\operatorname{tg}x+1)dx}{\cos^2 x}$;

2) $\int(x+4)e^{2x}dx$;

3) $\int\frac{(2x-2)dx}{x^2+2x-3}$;

80. 1) $\int e^{\cos x}\sin x dx$;

2) $\int\frac{1-\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx$;

3) $\int\frac{4x-2}{x^2-3x+2}dx$;

Задание № 9. Вычислить определенные интегралы с точностью до двух знаков после запятой.

81. 1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x}$;

2) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(2x+1)e^x dx$.

82. 1) $\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{3x^2dx}{1+x^6}$;

2) $\int\limits_1^{e}x\ln x dx$.

83. 1) $\int\limits_0^{\sqrt{3}}x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$;

84. 1) $\int\limits_1^{2}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$;

2) $\int_{2}^{3} x\ln(x-1)dx$.

2) $\int_{1}^{2} x\ln x dx$.

85. 1) $\int_{0}^{12\sqrt{3}} \frac{12x^5 dx}{\sqrt{x^6+1}}$;

86. 1) $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$;

2) $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2) $\int_{1}^{2} \frac{3\cos x}{4+\sin^2 x}dx$.

87. 1) $\int_{0}^{1} \frac{xdx}{x^2+1}$;

88. 1) $\int_{0}^{1} \left(3+x^2 e^{x^3}\right)dx$;

2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$.

2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2} (2x-3)\cos x dx$.

89. 1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^2 x dx$;

90. 1) $\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$;

2) $\int_{0}^{\pi} 3xe^{2x} dx$.

2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (x+3)\sin x dx$.

Задание 10. Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) площадь фигуры, ограниченной указанными линиями.

91. $y=\sqrt{x},\ y=x^3$.

92. $xy=6,\ x+y-7=0$.

93. $y=x^2+1,\ x=0,\ x=3,\ y=0$.

94. $y=(x-2)^3,\ y=4x-8,\ y\geq 0$.

95. $y=\sqrt{x}, x+y=2, y=0$.

96. $y=4-x^2,\ y=x^2-2x$.

97. $y=x+1,\ y=\cos x,\ y=0$.

98. $y=x^2,\ y=2-x^2$

99. $y=x^2,\ y=3-x$.

100. $y=\arccos x,\ y=0,\ x=0$.

ИДЗ 2.

Задание №11. Дана функция $z=f(x,y)$. Найти:

1) полный дифференциал функции **dz**,

2) частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

3) смешанные частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

111. $z=\sqrt{\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}}$

116. $z=\frac{tgx}{y}$

112. $z=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$.

117. $z=arcctg\frac{y}{x}$.

113. $z=x\cos y^2$.

118. $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$

114. $z=\arccos\frac{y}{x}$.

119. $z=\sin(\frac{x}{2}-\frac{y}{3})$.

115. $z = \ln\sqrt{x^2 + 4y}$.　　　　**120.** $z = arctg(5x - y)$.

Задание № 12. Исследовать данную функцию $z=f(x,y)$ на экстремум.

101. $z = x^2 + 2xy - y^2 + 6x - 10y + 1$.

102. $z = 3x^2 + 3xy + y^2 - 6x - 2y + 1$

103. $z = 3xy - x^2 - 3y^2 - 6x + 9y - 4$.

104. $z = 3x^2 + 5xy + 3y^2 + x - y + 5$.

105. $z = x^2 - xy + y^2 + x + y + 2$.

106. $z = 3x^2 + 5xy + 3y^2 + 4x + 7y + 5$.

107. $z = xy - x^2 - 2y^2 + x + 10y - 8$.

108. $z = x^2 + 3xy + y^2 - x - 4y + 1$.

109. $z = 3xy - x^2 - 4y^2 + 4x - 6y - 1$.

110. $z = 4 - 4xy - 5x^2 - y^2 - 4x - 2y$.

Задание № 13. Даны комплексные числа z_1, z_2.

1) Запишите число $z = z_1 + z_2$ в алгебраической форме.
2) Запишите число $z = z_1 + z_2$ в тригонометрической форме.
3) Изобразите числа z, z_1, z_2 на комплексной плоскости.
4) Вычислить z^{12} по формуле Муавра.

	Z_1	Z_2		Z_1	Z_2
121	2	$2(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3})$	**122.**	-2	$2(cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6})$
123.	-2	$2(cos\frac{4\pi}{3} + isin\frac{4\pi}{3})$	**124.**	$-2i$	$2(cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6})$
125.	-2	$2(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3})$	**126.**	$-2i$	$2(cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6})$
127.	2	$2(cos\frac{4\pi}{3} + isin\frac{4\pi}{3})$	**128.**	$-2i$	$2(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6})$
129.	2	$2(cos\frac{5\pi}{3} + isin\frac{5\pi}{3})$	**130.**	$2i$	$2(cos\frac{7\pi}{6} + isin\frac{7\pi}{6})$

Задание № 14. Дан повторный интеграл.

1) Постройте на плоскости xOy область интегрирования заданного интеграла.

2) Измените порядок интегрирования и вычислить площадь области при заданном и измененном порядках интегрирования.

3) Вычислите данный интеграл.

131.	$\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{3x^2}{8}}^{3\sqrt{x}} dy.$	**132.**	$\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{x^2}{2}}^{4\sqrt{x}} dy.$
133.	$\int\limits_1^7 dx \int\limits_{\frac{(x-1)^2}{6}}^{x-1} dy.$	**134.**	$\int\limits_0^3 dx \int\limits_{x^2-3}^{3x-3} dy.$
135.	$\int\limits_0^3 dx \int\limits_{8-3x}^{8-x^2} dy.$	**136.**	$\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2}^{2\sqrt{2x}} dy.$
137.	$\int\limits_0^9 dx \int\limits_{\frac{x^2}{9}+1}^{x+1} dy.$	**138.**	$\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{x^3}{8}}^{4\sqrt{x}} dy.$
139.	$\int\limits_0^3 dx \int\limits_{\frac{2x^2}{3}}^{2\sqrt{3x}} dy.$	**140.**	$\int\limits_0^6 dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}}^{\frac{3x}{2}} dy.$

Задание 15. Найти общее решение дифференциального уравнения.

141.	$y'\sin y\cos x = \cos y\sin x$	$y'' - 2y'\operatorname{tg} x = \sin x$
142.	$y' = (2y+1)\operatorname{tg} x$	$3yy'' + (y')^2 = 0$
143.	$x^2y' - 2xy = 3$	$y'' = 2 - y$
144.	$xy' + y = x + 1$	$xy'' = y' + x^2$.
145.	$e^{x+3y}y' = x$	$y'' + y'\operatorname{tg} x = \sin 2x$
146.	$xy' + y = 3$	$y'' + \dfrac{y'}{x} = x^2$
147.	$y'\cos x + y\sin x = 1$	$1 + (y')^2 + yy'' = 0$
148.	$y'\cos x = (y+1)\sin x$	$(1+y)y'' - 5(y')^2 = 0$
149.	$x^2y' + 2xy = 1$	$xy'' + 2y' = x^3$
150.	$y' + y\cos x = -\cos x$	$y''\operatorname{tg} y = 2(y')^2$

Задание № 16. Даны линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Найти частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

151. $y'' - 3y' = 3e^{3x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$.

152. $y'' + 4y = e^{-2x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

153. $y'' - 2y' = 2x + 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

154. $y'' - 4y' + 5y = 5x - 4$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

155. $y'' + y' = 3\cos x - \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

156. $y'' - 2y' - 8y = 16x^2 + 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$.

157. $y'' + 4y = 3\cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

158. $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 5$.

159. $y'' - 4y = 4\sin 2x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 7$.

160. $y'' - 2y' + y = 9e^{-2x} + 2x - 4$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Задание № 17. Решить систему уравнений и выделить частные решения, удовлетворяющие указанным начальным условиям.

161. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + e^t \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2e^t \end{cases}$, $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

162. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + \cos t \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 3\sin t \end{cases}$, $x(0) = 2$, $y(0) = -4$.

163. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$, $x(0) = 1$, $y(0) = 3$.

164. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y \end{cases}$, $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

165. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$, $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

166. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$, $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

167. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + e^{3t} \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 5e^{3t} \end{cases}$, $x(0)=2$, $y(0)=3$.

168. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + t^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2t \end{cases}$, $x(0)=2$, $y(0)=3$.

169. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 6y \end{cases}$, $x(0)=1$, $y(0)=-1$.

170. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 5y \end{cases}$, $x(0)=1$, $y(0)=-1$.

Задание №18. Исследовать сходимость следующих числовых рядов с помощью достаточных признаков.

171. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}$	**172.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n(n+1)}{5^n}$	**173.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n/2}}$	**174.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3n!}$	**175.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(n+1)!}$
176. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)(n+2)}$	**177.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n \cdot n!}{n^n}$	**178.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$	**179.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}$	**180.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^5}$

Задание №19. Дан степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

1) Напишите первые четыре члена данного ряда.
2) Найдите область сходимости ряда.

	a_n		a_n
181	$\frac{4n-3}{\sqrt{n3^n}}$	**186**	$\frac{3^n}{n!}$
182	$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$	**187**	$\frac{n^3}{e^n}$

183	$\frac{2^n}{n^2+1}$	**188**	$\frac{2^n}{\sqrt{2n-1}}$
184	$\frac{2^n}{n(n+1)}$	**189**	$\frac{1}{5^n(n-1)}$
185	$\frac{1}{2^n n}$	**190**	$\frac{1}{n(n+1)}$

ИДЗ № 3.

Задание №20. Решите задачу.

191. На прядильной, фабрике работница обслуживает 750 веретен. При вращении веретена пряжа рвется в случайные моменты времени из-за неравномерности натяжения, неровности и других причин. Вероятность обрыва нити в течение некоторого промежутка времени T на каждом из веретен равна 0,008. Найти вероятность того, что за это время произойдет не более 10 обрывов.

192. Среднее число заявок, поступивших на предприятие бытового обслуживания за 1 час, равно четырем. Найти вероятность того, что за 3 часа поступят 6 заявок.

193. Вероятность того, что телевизор потребует ремонта в период гарантийного срока, равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока из шести телевизоров не более одного потребует ремонта.

194. Пусть вероятность того, что пассажир опоздает к поезду, равна 0,02. Найти вероятность того, что из 855 пассажиров опоздают к отправлению поезда не более 15.

195. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти вероятность того, что в 100 испытаниях событие появится не менее 20 и не более 30 раз.

196. Среднее число самолетов, прибывающих в аэропорт за 1 мин равно трем. Найти вероятность того, что за 2 мин прибудут четыре самолета.

197. Средний процент нарушения работы кинескопа в течение гарантийного срока равен 12. Вычислить вероятность того, что среди 10 телевизоров только два не выдержат гарантийного срока.

198. Предприятие имеет 2400 агрегатов. В каждый агрегат входит деталь, вероятность выхода из строя которой за время T равна 0,12. Исходя из этого отдел снабжения заготовил на время T 400 запасных деталей этого типа. Найти вероятность того, что это количество запасных деталей обеспечит бесперебойную работу всех агрегатов в течение времени T.

199. Вероятность отказа автомата по продаже железнодорожных билетов равна 0,04. Найти вероятность того, что из 100 пассажиров, бравших билету у автомата, только двое получат отказ, т.е. автомат не сработает дважды.

200. Вероятность того, что каждому из 800 покупателей необходима обувь женская 36 размера, равна 0,3. Найти вероятность того, что не менее 240 покупателям потребуется обувь женская 36 размера.

Задание №21. Решите задачу.

201. Всхожесть семян некоторого сорта пшеницы составляет 85%. Найти вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут: а) три; б) не менее трех.

202. Вероятность промышленного содержания металла в каждой пробе руды равна 0,4. Найти вероятность того, что среди 1000 проб более 400 проб с промышленным содержанием металла.

203. Оптовая база обслуживает 12 магазинов. От каждого магазина заявка на товары на следующий день может поступить с вероятностью 0,3. Найти вероятность того, что на следующий день потребуют товары 3 магазина.

204. Вероятность того, что денежный автомат при опускании одной монеты сработает неправильно, равна 0,03. Найти вероятность того, что при спускании 150 монет автомат сработает неправильно не более 10 раз.

205. Пусть вероятность того, что пассажир опоздает на самолет, равна 0,03. Найти вероятность того, что из 300 пассажиров опоздает не более 5.

206. Среднее число кораблей заходящих в порт за 1 час равно трем. Найти вероятность того, что за 4 часа в порт зайдут 6 кораблей.

207. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,6. Найти вероятность того, что при 200 выстрелах мишень будет поражена не менее 110 раз.

208. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в 1 мин ,равно двум. Найти вероятность того, что за 4 мин поступит 5 вызовов.

209. При штамповке некоторых деталей автомат выдает 95% годных. Найти вероятность того, что при изготовлении 1000 деталей автомат дает от 800 до 920 годных.

210. Вероятность появления событий в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что событие наступит ровно 60 раз в 100 испытаниях.

Задание №22.

211. Экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы, но не свыше 4 вопросов. Вероятность того, что студент ответит на каждый из вопросов экзаменатора, одна и та же, равна 0,8. Преподаватель прекращает экзамен, как только студент не знает ответа на заданный вопрос. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа заданных вопросов.

212. С завода поступило 4 партии измерительных приборов по 15 приборов в каждой партии. Известно, что в каждой партии находится по 5 измерительных приборов со знаком качества. Наудачу отбирается по одному измерительному прибору из каждой партии. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа измерительных приборов со знаком качества среди отобранных.

213. При игре в городки остался 1 городок, а у игрока осталось 5 бит. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа неиспользованных бит, которые останутся у игрока после, того, как последний городок будет выбит, если вероятность выбить городок при каждом броске равна 0,6.

214. Производится ряд выстрелов по мишени с вероятностью попадания 0,8 при каждом выстреле: стрельба ведется до первого попадания в мишень, но свыше 4 выстрелов. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа произведенных выстрелов.

215. Известно, что в партии из 20 телефонных аппаратов имеется 5 неисправленных. Из партии выбрано 4 аппарата. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа неисправленных аппаратов среди отобранных.

216. Студент купил 4 билета новогодней лотереи. Вероятность выигрыша по одному билету равна 0,6. Составить закон распределения числа выигрышей, математическое ожидание и дисперсию.

217. Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,3. Составить закон распределения числа библиотек, которые посетит студент, если в городе 4 библиотеки, математическое ожидание и дисперсию.

218. Два баскетболиста по очереди забрасывают мяч в корзину с вероятностью попадания при каждом броске для первого 0,8, для второго - 0,7. Всего производится пять бросков. Составить законы распределения числа попаданий для каждого игрока, если начинает бросать первый баскетболист, найти математическое ожидание и дисперсию для каждого из законов распределения.

219. Охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более четырех выстрелов. Составить закон распределения числа промахов, если вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Вычислить математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

220. Обрыв связи произошел на одном из пяти звеньев телефонного кабеля. Монтёр последовательно проверяет звенья для обнаружения места обрыва. Составить закон распределения числа обследованных звеньев, если вероятность обрыва связи одинакова для всех звеньев, математическое ожидание и дисперсию.

Задание № 23. Дано статистическое распределение выборки (в первой строке указаны выборочные варианты X_i, а во второй строке – соответственные частоты n_i количественного признака X).

Требуется найти:

I. Методом произведений: а) выборочное среднеквадратическое отклонение; б) выборочную дисперсию.

II. Доверительные интервалы для оценки неизвестного математического ожидания a с заданной надёжностью $\gamma = 0.95$.

III. Пользуясь критерием Пирсона, при уровне значимости 0,05 , установить , согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности с данными выборки объёма n=100.

221.

X_i	100	110	120	130	140	150	160
n_i	4	6	10	40	20	12	8

222.

X_i	130	140	150	160	170	180	190
n_i	5	10	30	25	15	10	5

223.

X_i	102	112	122	132	142	152	162
n_i	4	6	10	40	20	12	8

224.

X_i	26	32	38	44	50	56	62
n_i	5	15	40	25	8	4	3

215.

X_i	110	115	120	125	130	135	140
n_i	5	10	30	25	15	10	5

226.

X_i	45	50	55	60	65	70	75
n_i	4	6	10	40	20	12	8

227.

X_i	11,5	12,0	12,5	13	13,5	14	14,5

n_i	5	15	40	25	8	4	3

228.

X_i	104	109	114	119	124	129	134
n_i	4	6	10	40	20	12	8

229.

X_i	105	110	115	120	125	130	135
n_i	4	6	10	40	20	12	8

230.

X_i	130	140	150	160	170	180	190
n_i	5	10	30	25	15	10	5

Задание № 24. Известно, что втулки, выпускаемые цехом, по размеру внешнего диаметра распределены по нормальному закону. Стандартная длина внешнего диаметра втулки (математическое ожидание) равна a мм, среднее квадратическое отклонение – σ мм. Найти: 1) вероятность того, что внешний диаметр наудачу взятой втулки будет больше α мм и меньше β мм; 2) вероятность того, что внешний диаметр втулки отклонится от стандартной длины не более чем на δ мм. Значения a, σ, α, β, δ даны.

231.	a=75	σ =4	α=72	β=78	δ=2,5
232.	a=95	σ =3	α=90	β=99	δ=2
233.	a=120	σ =5	α=112	β=124	δ=3
234.	a=124	σ =5	α=120	β=127	δ=2
235.	a=114	σ =3	α=112	β=116	δ=1,5
236.	a=110	σ =4	α=108	β=114	δ=2
237.	a=50	σ =5	α=42	β=54	δ=2
238.	a=80	σ =4	α=76	β=84	δ=1
239.	a=100	σ =2	α=106	β=112	δ=2
240.	a=90	σ =5	α=87	β=94	δ=1,5

Задание №25. Найти выборочное уравнение прямой $\overline{y_x} - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x})$ регрессии Y на X по данной корреляционной таблице.

241.

Y	X						n_y
	4	9	14	19	24	29	
10	2	3	-	-	-	-	5
20	-	7	3	-	-	-	10
30	-	-	2	50	2	-	54
40	-	-	1	10	6	-	17
50	-	-	-	4	7	3	14
n_x	2	10	6	64	15	3	n=100

242.

Y	X						n_y
	10	15	20	25	30	35	
30	2	6	-	-	-	-	8
40	-	4	4	-	-	-	8
50	-	-	7	35	8	-	50
60	-	-	2	10	8	-	20
70	-	-	-	5	6	3	14
n_x	2	10	13	50	22	3	n=100

243.

Y	X						n_y
	15	20	25	30	35	40	
5	4	2	-	-	-	-	6
10	-	6	4	-	-	-	10
15	-	-	6	45	2	-	53
20	-	-	2	8	6	-	16
25	-	-	-	4	7	4	15
n_x	4	8	12	57	15	4	n=100

244.

Y	X						n_y
	15	15	20	25	30	35	
6	4	2	-	-	-	-	6
12	-	6	2	-	-	-	8
18	-	-	5	40	5	-	50

24	-	-	2	8	7	-	17
30	-	-	-	4	7	8	19
n_x	4	8	9	52	19	8	n=100

245.

Y	X						n_y
	5	10	15	20	25	30	
20	1	5	-	-	-	-	6
30	-	5	3	-	-	-	8
40	-	-	9	40	2	-	51
50	-	-	4	11	6	-	21
60	-	-	-	4	7	3	14
n_x	1	10	16	55	15	3	n=100

246.

Y	X						n_y
	5	10	15	20	25	30	
8	2	4	-	-	-	-	6
12	-	3	7	-	-	-	10
16	-	-	5	30	10	-	45
20	-	-	7	10	8	-	25
24	-	-	-	5	6	3	14
n_x	2	7	19	45	24	3	n=100

247.

Y	X						n_y
	2	7	12	17	22	27	
10	2	4	-	-	-	-	6
20	-	6	2	-	-	-	8
30	-	-	3	50	2	-	55
40	-	-	1	10	6	-	17
50	-	-	-	4	7	3	14
n_x	2	10	6	64	15	3	n=100

248.

Y	X	n_y

	11	16	21	26	31	36	
25	2	4	-	-	-	-	6
35	-	6	3	-	-	-	9
45	-	-	6	45	4	-	55
55	-	-	2	8	6	-	16
65	-	-	-	4	7	3	14
n_x	2	10	11	57	17	3	n=100

249.

Y	X						n_y
	4	9	14	19	24	29	
8	3	3	-	-	-	-	6
18	-	5	4	-	-	-	9
28	-	-	40	2	8	-	50
38	-	-	5	10	6	-	21
48	-	-	-	4	7	3	14
n_x	3	8	49	16	21	3	n=100

250.

Y	X						n_y
	5	10	15	20	25	30	
11	4	2	-	-	-	-	6
21	-	5	3	-	-	-	8
31	-	-	5	45	5	-	55
41	-	-	2	8	7	-	17
51	-	-	-	4	7	3	14
n_x	4	7	10	57	19	3	n=100

Список рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. для втузов. В 2-х т. Т.1: - М.: Интеграл – Пресс, 2008. – 416 с.

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. для втузов. В 2-х т. Т.2: - М.: Интеграл – Пресс, 2008. – 544 с.

3. Задачник по высшей математике для вузов: Учебное пособие. - 2-е изд., стер./ под ред. А.С.Поспелова – СПб: Лань, 2011. – 512 с.: ил. (Учебники для вузов. Специальная литература).

4. Гмурман В.Е. Теория вероятности и математическая статистика: учебное пособие. –изд., 12-е перераб.– М.: Высшая школа, 2008.–479 с.; ил. (Основы наук.)

5. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование: Учебное пособие/Под общ. ред. А.В. Кузнецова и Р.Т. Рутковского. 3-е изд., стер.– СПб.: Издательство "Лань", 2010.–448 с. ил. –(Учебники для вузов. Специальная литература).

Дополнительная литература

6. Гмурман В.Е. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистики.– М.: Высшая школа, 2004.

7. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.–М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.

8. Рябушко А.П. Индивидуальные задания по высшей математике. Ч.1-4.[Электронный ресурс]; В 4 ч.: учеб. пособие / А.П. Рябушко [и др.]; по общ. ред. А.П. Рябушко.-6-е изд. –Минск.:Высш. шк., 2014. - *Режим доступа:* http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=509664.

9. Высшая математика для экономистов: Практикум для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям/[Н.Ш. Кремер и др.]; под ред. проф. Н.Ш. Кремера.–(2-е изд., перераб. и доп.– М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007.–479 с.

10. Воронкова Т.Б., В.В. Кувшинова, Г.Л. Приходько. Высшая математика: методические указания по изучению дисциплины / Горки: БГСХА, 2015.-55 с. -*Режим доступа:http: //*twirpx.com›file/1625196/, *http: //moodle.kubstu.ru (по паролю)*

11. Колпакова Е.В. Линейная алгебра: учебно-методическое пособие для студентов инженерно-технических специальностей всех форм обучения. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2011.–72 с.