Для дорожников

Содержание:

Введение.

Студент во всех задачах[1] *выбирает номер варианта по последней цифре шифра (номера зачетной книжки).* Значения углов даны в градусах, где не оговорено другое.

Каждое задание выполняется в отдельной тетради (ученической) (или на листах А4, вложенных в отдельный файл), страницы которой нумеруются, допускается компьютерное оформление работ. На обложке указываются: название дисциплины, номер работы, фамилия и инициалы студента, учебный шифр, факультет, специальность. На первой странице тетради записываются: номер контрольной работы.

Решение каждой задачи обязательно начинать на развороте тетради (на четной странице, начиная со второй, иначе работу трудно проверять). Сверху указывается номер задачи, далее делается чертеж (можно карандашом) и записывается, что в задаче дано и что требуется определить (текст задачи не переписывается). *Чертеж выполняется с учетом условий решаемого варианта задачи;* на нем все углы, действующие силы, число тел и их расположение на чертеже должны соответствовать этим условиям. В результате в целом ряде задач чертеж получается более простой, чем общий.

Чертеж должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволять ясно показать все силы или векторы скорости и ускорения и др.; показывать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы получаемых величин *нужно обязательно*. Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т. п.) и *подробно излагать весь ход расчетов.* На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, проверяться не будут, а будут возвращаться для переделки.

К работе, высылаемой на повторную проверку (если она выполнена в другой тетради), должна обязательно прилагаться не зачтённая работа.

На экзамене необходимо представить зачтённые контрольные работы, в которых все отмеченные рецензентом погрешности должны быть исправлены.

Список рекомендуемой литературы.

Основная литература

Цывильский В.Л. Теоретическая механика. –М.: Высшая школа, 2004.[2]

[1] Кроме тех задач, в условии которых прямо оговорено другое применение номеров рисунков и данных к вариантам.

[2] Данный учебник рекомендуется в качестве основного учебного пособия при самостоятельном изучении курса «Теоретической механики». Имеется в достаточном количестве на абонементе библиотеки Филиала БГТУ им. В.Г.Шухова в г.Новороссийске.

Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Т. 1,2. М., 1985.
Добронравов В. В., Никитин Н. Н. Курс теоретической механики. М., 1983.
Никитин Е.М. Краткий курс теоретической механики. М., 1971.
Старжинский В. М. Теоретическая механика. М., 1980.
Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. М., 1986 и предыдущие издания.
Поляков Н.Н. и др. Теоретическая механика. М., 2000 и предыдущие издания.
Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики. Ч. 1. М., 1984 и более новые издания.
Яблонский А. А. Курс теоретической механики. Ч. 2. М., 1984 и
более новые издания
Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике. М., 1986 и предыдущие издания.
Сборник задач по теоретической механике. /Под ред. К. С. Колесникова. М., 1983.

Дополнительная литература

Бать М. И.. Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Ч. 1, 2. М., 1984 и предыдущие издания.
Сборник задач по теоретической механике/ Под ред. *Бражниченко И. А., Кан В. Л., Минцберг Б. Л.* и др. М., 1987.
Новожилов И. В., Зацепин М. Ф. Типовые расчеты по теоретической механике на базе ЭВМ. М., 1986,
Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике /Под ред. *А. А. Яблонского.* М., 1985 и предыдущие издания (содержит примеры решения задач).

СТАТИКА

I.Плоская система сил.

Задача С1[3]. Определение реакций опор твёрдого тела.

На схемах (рис.1 приложения) показаны три способа закрепления бруса а), б) и в), ось которого – ломаная линия. Задаваемая нагрузка (см. табл.1) и размеры (м) во всех случаях одинаковы.

Определить реакции опор для того способа закрепления бруса, при котором реакция, указанная в таблице 1, имеет наименьший модуль.

№ вар-та	P, кН	M, кН*м	q , кН/м	Исследуемая реакция
1	10	6	2	X_A
2	20	5	4	M_A
3	15	8	1	Y_B
4	5	2	1	Y_B
5	10	4	-	X_B
6	6	2	1	M_A
7	2	4	2	X_A
8	20	10	4	R_B
9	10	6	-	Y_A
0	2	4	2	X_A

Таблица 1

<u>Пример выполнения задания.</u> Дано: схемы закрепления бруса (рис. 1, а,б,в); $P = 5$ кН, $M = 8$ кН*м, $q = 1{,}2$ кН/м.

Определить реакции опор для того способа закрепления, при котором момент M_A имеет наименьшее значение.

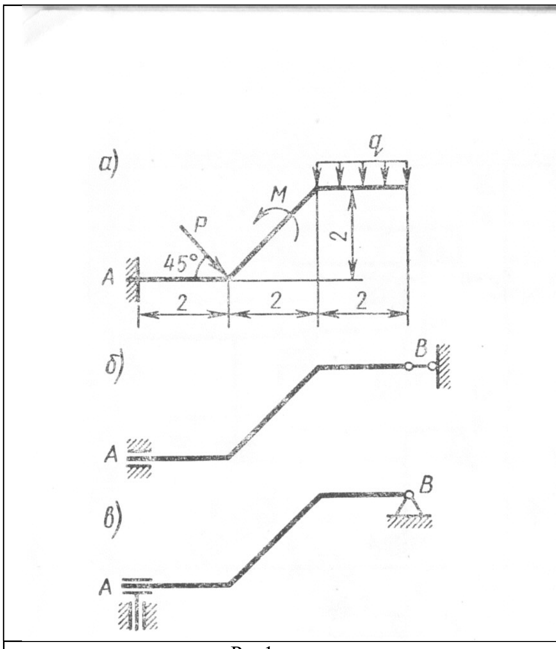

Рис1

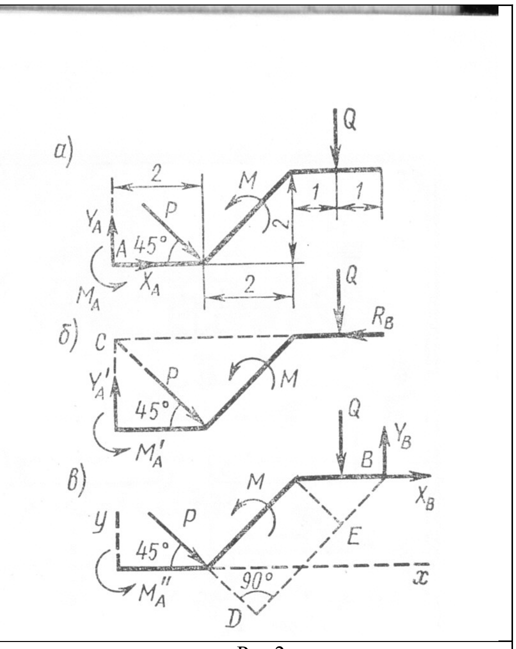

Рис.2

---

[3] Задание С.1 из «Сборника заданий для курсовых работ по теоретической механике» под ред. Яблонского А.А. - М, 1985.

Р е ш е н и е . Рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных к конструкции. Действие связей на конструкцию заменяем их реакциями (рис.2): в схеме а) – X_A, Y_A, M_A, в схеме б) – Y'_A, M'_A и R_B, в схеме в) – M''_A, X_B и Y_B. Равномерно распределённую нагрузку интенсивностью q заменяем равнодействующей

$$Q = q \cdot 2 = 2{,}4 \text{ кН}.$$

Чтобы выяснить, в каком случае момент в заделке является наименьшим, найдём его для всех трёх схем, не определяя пока остальных реакций.
Для схемы а)

$$\sum M_{iA} = 0; \; M_A - P \cdot 2\sin 45 + M - Q \cdot 5 = 0 .$$

Вычисления дают

$$M_A = 11{,}07 \text{ кН*м}.$$

Для схемы б)

$$\sum M_{iC} = 0; \; M'_A + M - Q \cdot 5 = 0 \text{ и } M'_A = 4{,}00 \text{ кН*м}.$$

Для схемы в)

$$\sum M_{iB} = 0; \; M''_A + P \cdot BD + M + Q \cdot 1 = 0 \text{ и } M''_A = -31{,}61 \text{ кН*м}.$$

Здесь

$$BD = BE + ED = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4{,}24 \text{ м}.$$

Т.о. наименьший момент в заделке получается при закреплении бруса по схеме б). Определим остальные опорные реакции для этой схемы:

$$\sum X_i = 0; \; P\cos 45 - R_B = 0, \text{ откуда } R_B = 3{,}54 \text{ кН};$$
$$\sum Y_i = 0; \; Y'_A - P\sin 45 - Q = 0, \text{ откуда } Y'_A = 5{,}94 \text{ кН}.$$

Результаты расчётов приведены в табл.2.

Схема на рис.2	Момент M_A (M'_A, M''_A) кН*м	Силы, кН	
		Y'_A	R_B
а	11,07	-	-
б	4,00	5,94	3,54
в	-31,61	-	-

Таблица 2

КИНЕМАТИКА

I.Кинематика точки.

Задача К1[4]. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям её движения.

По заданным уравнениям движения точки M установить вид её траектории и для момента времени $t = t_1$ (с) найти положение точки на траектории, её скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Необходимые для решения данные приведены в таблице 16.

№ вар-та	Уравнения движения x=x(t), см	Уравнения движения y=y(t), см	t1,c
1	$-2t^2+3$	$-5t$	1/2
2	$4\cos^2(\pi t/3)+2$	$4\sin^2(\pi t/3)$	1
3	$-\cos(\pi t^2/3)+3$	$\sin(\pi t^2/3)-1$	1
4	$4t+4$	$-4/(t+1)$	2
5	$2\sin(\pi t/3)$	$-3\cos(\pi t/3)+4$	1
6	$3t^2+2$	$-4t$	1/2
7	$3t^2-t+1$	$5t^2-5t/3-2$	1
8	$7\sin(\pi t^2/6)+3$	$2-7\cos(\pi t^2/6)+3$	1
9	$-3/(t+2)$	$3t+6$	2
0	$-4\cos(\pi t/3)$	$-2\sin(\pi t/3)-3$	1

Таблица 16

Пример выполнения задания. Исходные данные:

$$x = 4t\,;\;\; y = 16t^2 - 1;$$
$$t_1 = 0{,}5 \;\; (x, y - \text{в см},\;\; t - \text{в с}). \qquad (1)$$

Р е ш е н и е . Уравнения движения (1)можно рассматривать как параметрические уравнения траектории точки. Чтобы получить уравнения траектории в координатной форме, исключим время t из уравнений (1).

Получаем $y = x^2 - 1$, т.е. траекторией точки является парабола, показанная на рис.36.

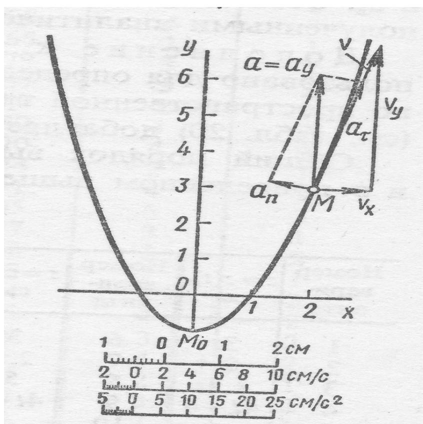

Рис.36

[4] Задание К.1 из «Сборника заданий для курсовых работ по теоретической механике» под ред. Яблонского А.А. - М, 1985.

Вектор скорости точки

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}\ . \qquad (2)$$

Вектор ускорения

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}\ .$$

Найдём проекции скорости и ускорения, дифференцируя по времени уравнения движения (1):

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = 4 \text{ см/с}; \quad a_x = \ddot{x} = 0\,; \\ v_y &= \dot{y} = 32t\,; \quad a_y = \ddot{y} = 32 \text{ см/с}^2 \end{aligned} \qquad (3)$$

По найденным проекциям определяются модуль скорости и модуль ускорения точки:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad (4)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad (5)$$

Модуль касательного ускорения точки

$$a_\tau = \left| dv / dt \right|, \qquad (6)$$

или

$$a_\tau = \left| \vec{v} \cdot \vec{a} / v \right|\ ; \qquad (6')$$

$$a_\tau = \left| (v_x a_x + v_y a_y) \right| / v\ ; \qquad (6'')$$

dv/dt выражает проекцию ускорения точки на направление её скорости. Знак «+» при dv/dt означает, что движение точки ускоренное, направления $\vec{a}_\tau$ и $\vec{v}$ совпадают; знак «-» – что движение замедленное.
Модуль нормального ускорения точки

$$a_n = v^2 / \rho\ . \qquad (7)$$

Если радиус кривизны траектории ρ в рассматриваемой точке неизвестен, то a_n можно определить по формуле

$$a_n = \left| \vec{v} \times \vec{a} \right| / v\ . \qquad (8)$$

При движении в плоскости формула (8) принимает вид

$$a_n = \left| v_x a_y - v_{yx} a_x \right| / v. \qquad (8')$$

Модуль нормального ускорения можно определить и следующим образом:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}\,. \qquad (9)$$

После того как найдено нормальное ускорение по формулам (8) или (9), радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке определяется из выражения

$$\rho = v^2 / a_n \qquad (10)$$

Результаты вычислений по формулам (3)-(6), (8)-(10) для заданного момента времени $t_1 = 0{,}5$ с приведены в таблице 17.

Координаты, см		Скорость, см/с^2			Ускорение, см/с^3					Радиус кривизны, см
x	y	v_x	v_y	v	a_x	a_y	a	a_τ	a_n	ρ
2,0	3,0	4,0	16,0	16,5	0	32,0	32,0	31,0	7,8	35,0

Таблица 17

На рис.36 показано положение точки M в заданный момент времени. Вектор $\vec{v}$ строим по составляющим $\vec{v}_x, \vec{v}_y$, причём этот вектор должен по направлению совпадать с касательной к траектории. Вектор $\vec{a}$ строим по составляющим $\vec{a}_x, \vec{a}_y$ и затем раскладываем на составляющие $\vec{a}_\tau, \vec{a}_n$. Совпадение величин $\vec{a}_\tau, \vec{a}_n$ найденных из чертежа, с их значениями, полученными аналитически, служит контролем правильности решения.

Д о п о л н е н и е[5] (к задаче К1). Данное задание может быть использовано для определения скорости и ускорения точки при её движении по пространственной траектории. Для этого к двум уравнениям движения в таблице 16 добавляется третье уравнение (табл.18).

№ вар-та	Уравнения движения z=z(t), см
1	3t
2	2t
3	1,5t
4	4t+4
5	t
6	3t
7	2,5t
8	5t
9	4t+8
0	t

Таблица 18

[5] Решается по требованию преподавателя.

Общий порядок выполнения задания в этом случае такой же, как и в приведённом выше примере.

II. Кинематика АТТ[6].

Поступательное и вращательное движение АТТ.

Задача К2[7]. Определение скоростей и ускорений точек АТТ при поступательном и вращательном движениях.

Движение груза 1 должно описываться уравнением

$$x = c_2 t^2 + c_1 t + c_0, \qquad (1)$$

где t – время, с; c_{0-2} – некоторые постоянные.

В начальный момент времени $t = 0$ координата груза должна быть x_0, а его скорость – v_0.

Кроме того, необходимо, чтобы координата груза в момент времени $t = t_2$ была равна x_2.

Определить коэффициенты c_{0-2} при которых осуществляется требуемое движение груза 1. Определить также в момент времени $t = t_1$ скорость и ускорение груза и точки M одного из колёс механизма.

Схемы механизмов показаны на рис. 14-16 приложения, а необходимые данные приведены в табл.19.

№ вар-та	Радиусы, см				Координаты и скорости груза1 (см и см/с)			Расчётные моменты времени, с	
	R_2	r_2	R_3	r_3	x_0	v_0	x_2	t_2	t_1
1	60	45	36	-	2	12	173	3	2
2	80	-	60	45	5	10	41	2	1
3	100	60	75	-	8	6	40	4	2
4	58	45	60	-	4	4	172	4	3
5	80	-	45	30	3	15	102	3	2
6	100	60	30	-	7	16	215	4	2
7	45	35	105	-	8	5	124	4	3
8	35	10	10	-	6	2	111	3	2
9	40	30	15	-	10	7	48	2	1
0	15	-	40	35	5	3	129	4	3

Таблица 19

<u>Пример выполнения задания.</u> Дано: схема механизма (рис.37); $R2 = 50$, $r2 = 25$, $R3 = 65$, $r3 = 40$, $x0 = 14$, $v0 = 5$, $x2 = 168$, $t1 = 1$, $t2 = 2$.

Найти уравнение движения груза, а также скорости и ускорения точки M в момент времени $t = t_1$.

Р е ш е н и е . Уравнение движения груза 1 имеет вид

$$x = c_2 t^2 + c_1 t + c_0. \qquad (1)$$

[6] АТТ – абсолютно твёрдое тело.

[7] Задание К.2 из «Сборника заданий для курсовых работ по теоретической механике» под ред. Яблонского А.А. - М, 1985.

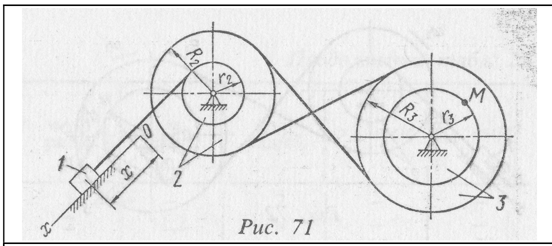	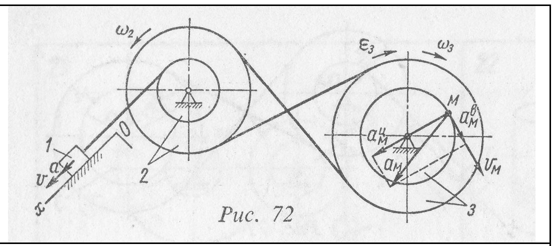
Рис. 37	Рис.38

Коэффициенты c_{0-2} могут быть определены из следующих условий:

$$\text{при } t = 0\,\text{с} \qquad x0 = 14 \text{ см}, \qquad \dot{x}0 = 5\,\text{см/с} \tag{2}$$
$$\text{при } \quad t2 = 2 \text{ с} \qquad x2 = 168 \text{ см} \tag{3}$$

Скорость груза 1

$$v = \dot{x} = 2c_2 t + c_1 . \tag{4}$$

Подставляя (2) и (3) в (1) и (4), находим коэффициенты c_{0-2}:

$$c_0 = 14 \text{ см}, \qquad c_1 = 5 \quad \text{см/с}, \qquad c_2 = 36 \text{ см/с}^2.$$

Т.о. уравнение движения груза 1

$$x = 36t^2 + 5t + 14 . \tag{5}$$

Скорость груза 1

$$v = \dot{x} = 72t + 5 . \tag{6}$$

Ускорение груза 1

$$a = \ddot{x} = 72 . \tag{7}$$

Для определения скорости и ускорения точки M запишем уравнения, связывающие скорость груза v и угловые скорости колёс $\omega_{2},_{3}$.
В соответствии со схемой механизма

$$\left.\begin{aligned} v &= r2 \cdot \omega 2 \\ R2\omega 2 &= R3\omega 3 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

откуда

$$\omega 3 = vR2/(r2R3) ,$$

или с учётом (6) после подстановки данных

$$\omega 3 = 2{,}215t + 0{,}154\,.$$

Угловое ускорение колеса 3

$$\varepsilon 3 = \dot{\omega} 3 = 2{,}215 \text{ рад/с}^2.$$

Скорость точки M, её вращательное a_M^b, центростремительное a_M^z и полное ускорения определяются по формулам

$$v_M = r_3\omega_3\,;\quad a_M^b = r3 \cdot \omega 3\,;\quad a_M^z = r3 \cdot \omega_3^2\,;$$
$$a_M = \sqrt{\left(a_M^z\right)^2 + \left(a_M^b\right)^2}\,.$$

Результаты вычислений для заданного момента времени $t1 = 1$ с приведены в таблице 20.
Скорости и ускорения тела 1 и точки M показаны на рис.38.

v, см/с	a, см/с^2	$\omega 3$, рад/с	$\varepsilon 3$, рад/с^2	v_M, см/с	a_M^z, см/с^2	a_M^b, см/с^2	a_M, см/с^2
77	72	2,37	2,22	94,8	224	88,6	241
							Таблица 20

Плоское движение АТТ.

Задача К3[8]. Кинематический анализ плоского механизма.

Найти для заданного положения механизма скорости и ускорения точек B и C, а также угловую скорость и угловое ускорение звена, которому эти точки принадлежат. Схемы механизмов помещены на рис.17 приложения, а необходимые для расчёта данные[9] приведены в таблице 21.

№ вар-та	Размеры, см				ω_{OA}, рад/с	ω_I, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2	v_A, см/с	a_A, см/с^2
	OA	r	AB	AC					
1	40	15	-	8	2	-	2	-	-
2	30	15	-	8	3	-	2	-	-
3	-	50	-	-	-	-	-	50	100
4	35	-	-	45	4	-	8	-	-
5	25	-	-	20	1	-	1	-	-
6	40	15	-	6	1	1	0	-	-
7	35	-	75	60	5	-	10	-	-
8	-	-	20	10	-	-	-	40	20
9	-	-	45	30	-	-	-	20	10
0	25	-	80	20	1	-	2	-	-

Таблица 21

Пример выполнения задания. Дано: схема механизма (рис.39); исходные данные (табл.22).

Размеры, см			ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2
OA	AB	AC		
10	60	20	1,5	2

Таблица 22

Р е ш е н и е . 1. *Определение скоростей точек и угловой скорости звена* (рис.40). Вычисляем модуль скорости пальца A кривошипа OA при заданном положении механизма:

$$v_A = \omega_{OA} OA$$

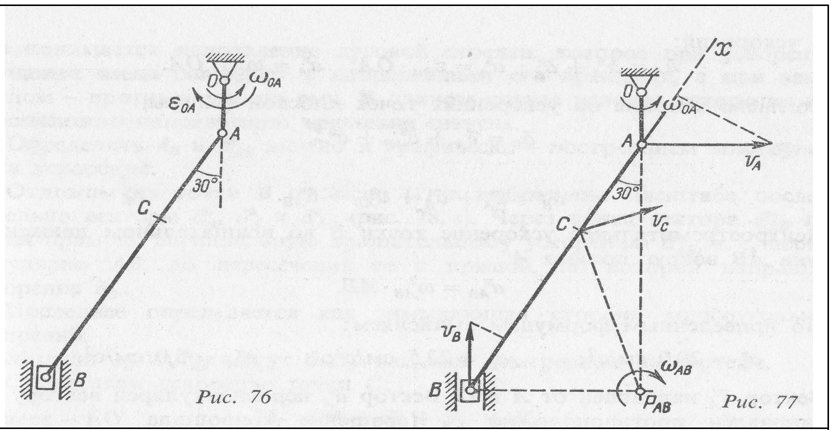

Рис.39 Рис. 40

[8] Задание К.3 из «Сборника заданий для курсовых работ по теоретической механике» под ред. Яблонского А.А. - М, 1985.

[9] ω_{OA} и ε_{OA} - угловая скорость и угловое ускорение кривошипа OA при заданном положении механизма; ω_I - угловая скорость колеса I (постоянная); v_A и a_A, - скорость и ускорение точки A. Качение колеса происходит без скольжения.

Скорость точки A перпендикулярна кривошипу OA. Скорость ползуна B направлена по вертикали. Мгновенный центр скоростей P_{AB} шатуна находится в точке пересечения перпендикуляров, проведённых из точек A, B к их угловым скоростям.
Угловая скорость звена AB

$$\omega_{AB} = v_A / AP_{AB}$$

Модули скоростей точек B, C

$$v_B = \omega_{AB} BP_{AB}; \quad v_C = \omega_{AB} CP_{AB}.$$

Расстояния AP, BP, CP определяются из рассмотрения треугольников ABP, ACP :

$$AP = 52{,}0 \text{ см}; \quad BP = 30{,}0 \text{ см}; \quad CP = 36{,}1 \text{ см}.$$

В соответствии с этим $v_A = 15{,}0$ см/с; $\omega_{AB} = 0{,}29$ рад/с; $v_B = 8{,}7$ см/с; $v_C = 10{,}5$ см/с.
Вектор $\vec{v}_C$ направлен перпендикулярно отрезку CP в сторону, соответствующую направлению вращения звена AB.
Для проверки определим скорость точки B другим способом. Воспользуемся теоремой о равенстве проекции скоростей точек на ось, проведённую через эти точки.
Направим ось x вдоль шатуна в направлении от B к A.
Имеем $v_A \cos(\vec{v}_A, x) = v_B \cos(\vec{v}_B, x)$, или, как видно из рис.40,

$$v_A \cos 60 = v_B \cos 30.$$

Отсюда

$$v_B = 8{,}7 \text{ см}.$$

Полезно убедиться, что и найденная ранее скорость точки C удовлетворяет этой теореме.
2. *Определение ускорений точек и углового ускорения звена* (рис.41).
Ускорение точки A складывается из вращательного и центростремительного ускорений:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^b + \vec{a}_A^z; \quad a_A^b = \varepsilon_{OA} OA; \quad a_A^z = \omega_{OA}^2 OA$$

Согласно теореме об ускорениях точек плоской фигуры,

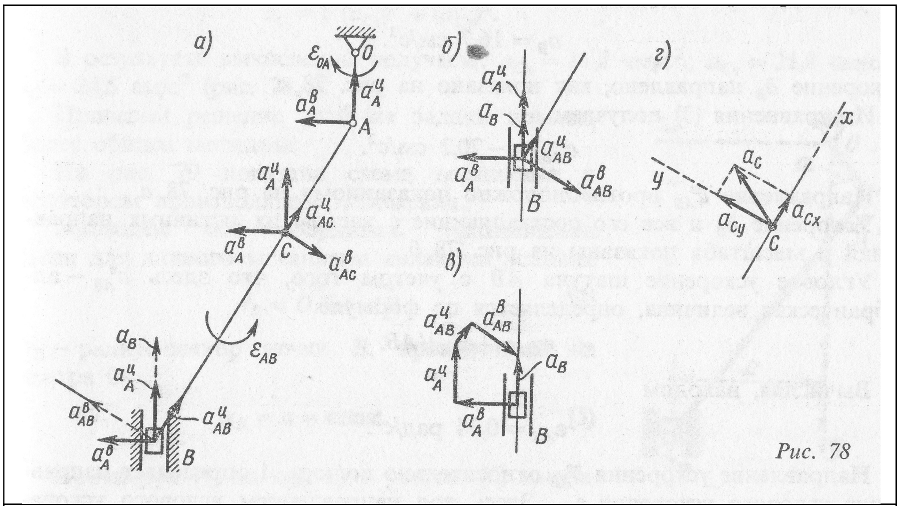

Рис.41

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}^b + \vec{a}_{AB}^z$$

или

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^b + \vec{a}_A^z + \vec{a}_{AB}^b + \vec{a}_{AB}^z . \qquad (1)$$

Центростремительное ускорение точки B во вращательном движении шатуна AB вокруг полюса A

$$a_{AB}^z = \omega_{AB}^2 AB .$$

По приведённым формулам вычисляем:

$$a_A^b = 20{,}0 \text{ см/с}^2; \quad a_A^z = 22{,}5 \text{ см/с}^2; \quad a_{AB}^z = 5{,}0 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_A^z$ направлен от A к O. Вектор $\vec{a}_A^b$ перпендикулярен вектору $\vec{a}_A^z$ и направлен противоположно v_A (вращение кривошипа – замедленное)
Вектор $\vec{a}_{AB}^z$ направлен от B к A. Что касается ускорения $\vec{a}_B$ точки B и вращательного ускорения $\vec{a}_{AB}^b$, то известны только линии действия этих векторов: $\vec{a}_B$ – по вертикали вдоль направляющих ползуна, $\vec{a}_{AB}^b$ – перпендикулярно .
Зададимся произвольно их направлениями по указанным линиям (рис.41,а). Эти ускорения определим из уравнений проекций векторного равенства (1) на оси координат. Знак в ответе показывает, соответствует ли выбранное направление истинному.
Выбрав направление осей x, y, как показано на рис.41,а, получаем:

$$a_B \cos 30 = -a_A^b \cos 60 + a_A^z \cos 30 + a_{AB}^z ; \qquad (2)$$
$$a_B \cos 60 = a_A^b \cos 30 + a_A^z \cos 60 + a_{AB}^b . \qquad (3)$$

Из уравнения (2) находим $a_B = 16{,}7$ см/с^2.
Ускорение $\vec{a}_B$ направлено, как показано на рис.41,а.

Из уравнения (3) находим $a_{AB}^{b} = -20{,}2$ см/с^2.
Направление $\vec{a}_{AB}^{b}$ противоположно показанному на рис.41,а.
Ускорение $\vec{a}_B$ и все его составляющие с учётом их истинных направлений и масштаба показаны на рис.41,б.
Угловое ускорение шатуна AB с учётом того, что здесь a_{AB}^{b} – алгебраическая величина, определяется по формуле

$$\varepsilon_{AB} = \left| a_{AB}^{b} \right| / AB .$$

Вычисляя, находим

$$\varepsilon_{AB} = 0{,}34 \text{ рад/с}^2.$$

Направление ускорения $\vec{a}_{AB}^{b}$ относительно полюса A определяет направление углового ускорения ε_{AB} . Здесь под направлением углового ускорения понимается направление дуговой стрелки, которое при ускоренном вращении звена совпадает с направлением его вращения, а при замедленном – противоположно ему. В данном случае угловое ускорение противоположно направлению вращения шатуна.
Определить $\vec{a}_B$ и $\vec{a}_{AB}^{b}$ можно графически – построением многоугольника ускорений.
Отложим из точки B согласно (1) в выбранном масштабе последовательно векторы $\vec{a}_A^{b}, \vec{a}_A^{z}, \vec{a}_{AB}^{z}$ (рис.41,в). Через конец вектора $\vec{a}_{AB}^{z}$ проведём прямую параллельную вращательному ускорению $\vec{a}_{AB}^{b}$, т.е. перпендикулярно AB, до пересечения её с прямой, по которой направлено ускорение $\vec{a}_B$.
Последнее определяется как замыкающая сторона многоугольника ускорений.
Модули a_B и a_{AB}^{b} могут быть найдены измерением на чертеже.
Определяем ускорение точки C:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A^{b} + \vec{a}_A^{z} + \vec{a}_{AC}^{b} + \vec{a}_{AC}^{z} .$$

Вращательное и центростремительное ускорения точки C во вращательном движении вокруг полюса A

$$a_{AC}^{b} = \varepsilon_{AB} AC ; \quad a_{AC}^{z} = \omega_{AB}^{2} AC ,$$

или

$$a_{AC}^{b} = 6{,}8 \text{ см/с}^2; \quad a_{AC}^{z} = 1{,}7 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_{AC}^{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{a}_{AC}^{z}$ и направлен соответственно угловому ускорению ε_{AB} .
Ускорение точки C находим способом проекций (рис.41,а):

$$a_{Cx} = a_{AC}^{z} + a_A^{z} \cos 30 - a_A^{b} \cos 60 ,$$

$$a_{Cy} = -a_{AC}^{b} + a_{A}^{z}\cos 60 + a_{A}^{b}\cos 30\,,$$

$$a_{C} = \sqrt{a_{Cx}^{2} + a_{Cy}^{2}}\,.$$

В результате вычислений получаем: $a_{Cx} = 11{,}2$ см/с^2; $a_{Cy} = 21{,}8$ см/с^2; $a_C = 24{,}5$ см/с^2; (рис.41,г).

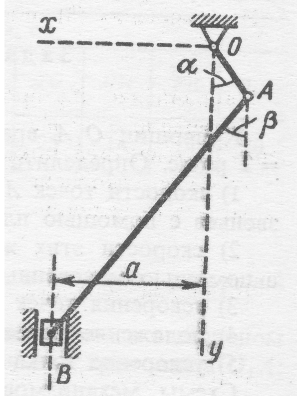

Рис.42

Приведём решение этой задачи другим, более общим методом.
На рис.42 показана схема механизма в некотором произвольном положении.
Проведём оси координат. Уравнениями связи для данного механизма являются условия

$$\vec{r}_B = \vec{OA} + \vec{AB} \qquad (4)$$

($\vec{r}_B$ – радиус-вектор точки B, проведённый из центра O),

$$x_B = a = const \qquad (5)$$

Проецируя (4) на ось x, с учётом (5) имеем

$$-OA\sin\alpha + AB\sin\beta = a \qquad (6)$$

Для определения угловой скорости звена AB $\omega_{AB} = \dot{\beta}$ и углового ускорения $\varepsilon_{AB} = \ddot{\beta}$ нет необходимости выражать β из (6). Проще непосредственно дважды продифференцировать (6).
Имея в виду, что $\dot{\alpha} = \omega_{OA}$, получаем в результате первого дифференцирования

$$-OA\cos\alpha\cdot\dot{\alpha} + AB\cos\beta\cdot\dot{\beta} = 0\,. \qquad (7)$$

Отсюда

$$\omega_{AB} = \omega_{OA}\frac{OA\cos\alpha}{AB\cos\beta}\,. \qquad (8)$$

Дифференцируя (7) и учитывая, что $\dot{\omega}_{OA} = \varepsilon_{OA}$, имеем

$$OA\sin\alpha\cdot\omega_{OA}^2 - OA\cos\alpha\cdot\varepsilon_{OA} - AB\sin\beta\cdot\omega_{AB}^2 + AB\cos\beta\cdot\varepsilon_{AB} = 0\,;$$

$$\varepsilon_{AB} = \omega_{AB}^2\cdot tg\beta + OA\frac{\varepsilon_{OA}\cos\alpha - \omega_{OA}^2\cos\beta}{AB\cos\beta}. \qquad (9)$$

Выражения (8) и (9) позволяют вычислять и для любого положения механизма, в частности для заданного ($\alpha = 0,\ \ \beta = 30$).

Заметим, что ω_{OA} и ε_{OA} входят в эти выражения со знаком «+» или «-» в соответствии с принятым направлением отсчёта угла α. В данном случае рад/с и ε_{OA}=-2,0 рад/с^2. Смысл знаков определяется направлением отсчёта угла β.

Модуль скорости точки B $v_B = |\dot{y}_B|$. Модуль ускорения $a_B = |\ddot{y}_B|$. Проецируя (4) на ось y, получаем

$$y_B = OA\cos\alpha + AB\cos\beta\,.$$

Отсюда после дифференцирования получаем

$$\dot{y}_B = -OA\sin\alpha\cdot\omega_{OA} - AB\sin\beta\cdot\omega_{AB}:$$

$$\ddot{y}_B = -OA\cos\alpha\cdot\omega_{OA}^2 - OA\sin\alpha\cdot\varepsilon_{OA} - AB\sin\beta\cdot\omega_{AB}^2 - AB\sin\beta\cdot\varepsilon_{AB}\,.$$

Для определения скорости и ускорения точки C следует составить уравнения её движения в координатной форме, проецируя радиус-вектор $\vec{r}_C = \vec{OA} + \vec{AC}$ на оси x, y.

Задача К4[10]. Кинематический анализ плоского механизма.

Кривошип O_1A вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_{O_1A} = 2$ рад/с. Определить для заданного положения механизма:

1) скорости точек $A, B, C \ldots$ механизма и угловые скорости всех его звеньев с помощью плана скоростей;

2) скорости точек $A, B, C \ldots$ механизма и угловые скорости всех его звеньев с помощью мгновенного центра скоростей;

3) ускорения точек A и B и угловое ускорение звена AB;

4) положение мгновенного центра ускорений звена AB;

5) ускорение точки M, делящей звено AB пополам.

Схемы механизмов показаны на рис.18 приложения, а необходимые для расчёта данные приведены в таблице 23.

№ вар-та	$\varphi°$	Расстояния, См					Длина звеньев, см										
		a	*b*	*c*	*d*	*e*	O_1A	O_2B	O_2D	O_3D	O_3F	AB	BC	CD	CE	DE	EF
1	200	18	23	18	22	23	14	28	-	28	-	21	21	48	38	-	42
2	60	56	10	26	16	25	21	25	-	-	20	54	52	69	35	-	32
3	90	15	25	54	35	-	15	28	-	58	-	42	21	47	26	-	31
4	155	26	15	23	-	-	15	65	-	-	-	51	22	38	-	-	-
5	125	19	19	10	22	-	12	-	19	-	-	55	19	23	-	38	22
6	60	65	49	-	-	-	15	29	-	24	-	50	25	32	23	-	39
7	250	11	42	11	7	24	16	34	-	-	41	25	25	42	21	-	49
8	90	27	18	14	15	30	14	29	-	23	-	55	32	15	-	45	-
9	200	23	19	20	28	21	21	31	-	25	-	65	62	31	-	11	29
0	20	55	21	25	-	-	15	-	24	-	-	70	35	33	-	17	12

Таблица 23

<u>Пример выполнения задания.</u> Дано: схема механизма в заданном положении (рис.43); исходные данные (табл.24).

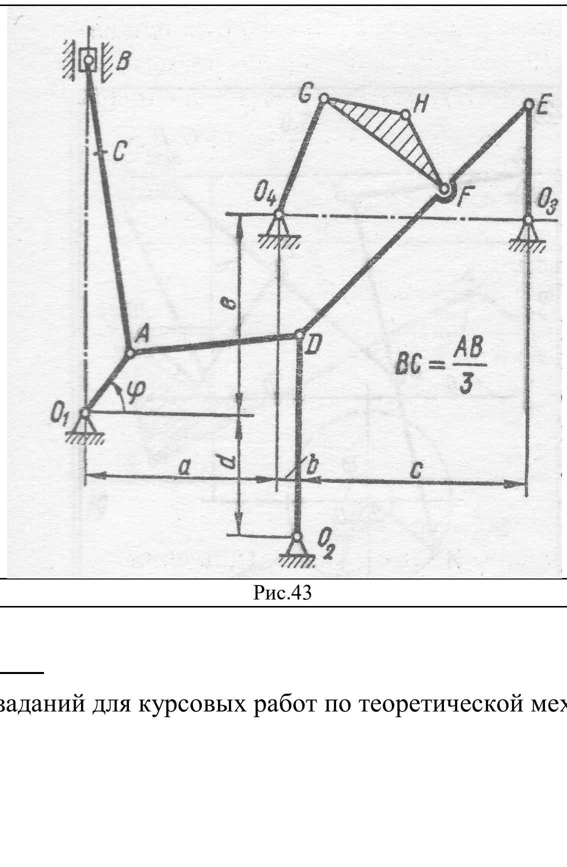

Рис.43

[10] Задание К.4 из «Сборника заданий для курсовых работ по теоретической механике» под ред. Яблонского А.А. - М, 1985.

$\varphi°$	Расстояния, См					Длина звеньев, см									
	a	*b*	*c*	*d*	*e*	O_1A	AB	AD	O_2D	O_3E	DE	FG	GH	FH	O_4G
52	32	4	39	19	32	12	46	29	32	18	53	25	14	14	20

Таблица 24

Р е ш е н и е . 1. О*пределение скоростей точек и угловых ускорений звеньев с помощью плана скоростей*.

а) *определяем скорости точек*. Строим схему механизма в выбранном масштабе (рис.44). Вычисляем модуль скорости точки A кривошипа O_1A:

$$v_A = \omega_{O1A} O_1A = 24 \text{ см/с.}$$

Вектор $\vec{v}_A$ перпендикулярен O_1A и направлен в сторону вращения кривошипа.

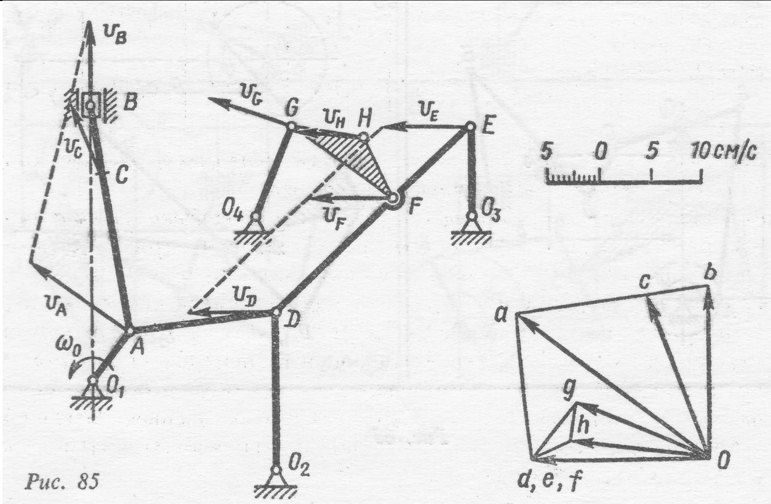

Рис.44

Строим план скоростей. Из произвольного выбранного полюса O проводим луч Oa, изображающий в выбранном масштабе скорость точки A. Для определения скорости точки B через полюс O проводим прямую, параллельную скорости $\vec{v}_B$, через точку a – прямую, перпендикулярную AB. Получаем точку b; отрезок Ob определяет скорость точки B. Измеряем длину луча Ob и, пользуясь масштабом скоростей, находим $v_b = 17{,}5$ см/с.

Для определения скорости точки C делим отрезок ab плана скоростей в отношении $ac/cb = AC/CB$.

Луч Oc изображает скорость точки C. Пользуясь масштабом скоростей, получаем $v_C = 17{,}5$ см/с.

Продолжая построение плана скоростей, находим $v_A, v_B, v_C, v_D, v_E, v_F, v_G, v_H$ (табл.25).

На чертеже механизма концы векторов скоростей точек прямолинейного звена (напр. A, B, C или D, E**) находятся на одной прямой**.

Способ определения	Скорости точек, см/с							
По плану скоростей	24	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	14,8	14,4
С помощью	24	17,3	17,5	17,4	17,4	17,4	14,6	14,1

мгновенного центра скоростей								
Таблица 25								

б) *определяем угловые скорости звеньев механизма*. Отрезок ab плана скоростей выражает вращательную скорость точки B вокруг точки A:

$$ab = v_{AB} = \omega_{AB} \cdot AB;$$

отсюда угловая скорость звена AB

$$\omega_{AB} = ab / AB = 0{,}424 \text{ рад/с}.$$

Аналогично определяются угловые скорости звеньев AD, DE, FGH:

$$\omega_{AD} = ad / AD;$$
$$\omega_{DE} = de / DE;$$
$$\omega_{FGH} = fg / FG.$$

Угловую скорость ω_{FGH} можно определить также из соотношений

$$\omega_{FGH} = gh / GH = fh / FH.$$

Угловая скорость звена O_2D определяется по вращательной скорости точки D вокруг неподвижного центра O_2:

$$\omega_{O_2D} = v_D / O_2D.$$

Аналогично определяются угловые скорости звеньев O_3E, O_4G:

$$\omega_{O3E} = v_E / O_3E; \quad \omega_{O4G} = v_G / O_4G.$$

Вычисленные по этим формулам угловые скорости приведены в таблице 26.

Способ определения	Угловые скорости звеньев, рад/с.						
	AB	AD	DE	O_2D	O_3E	FGH	O_4G
По плану скоростей	0,424	0,500	0	0,547	0,972	0,272	0,740
С помощью мгновенного центра скоростей	0,421	0,505	0	0,544	0,967	0,278	0,730
Таблица 26							

2. *Определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев механизма с помощью мгновенных центров скоростей.*

а) *определяем положения мгновенных центров скоростей звеньев механизма*. Строим схему механизма в выбранном масштабе (рис.45).

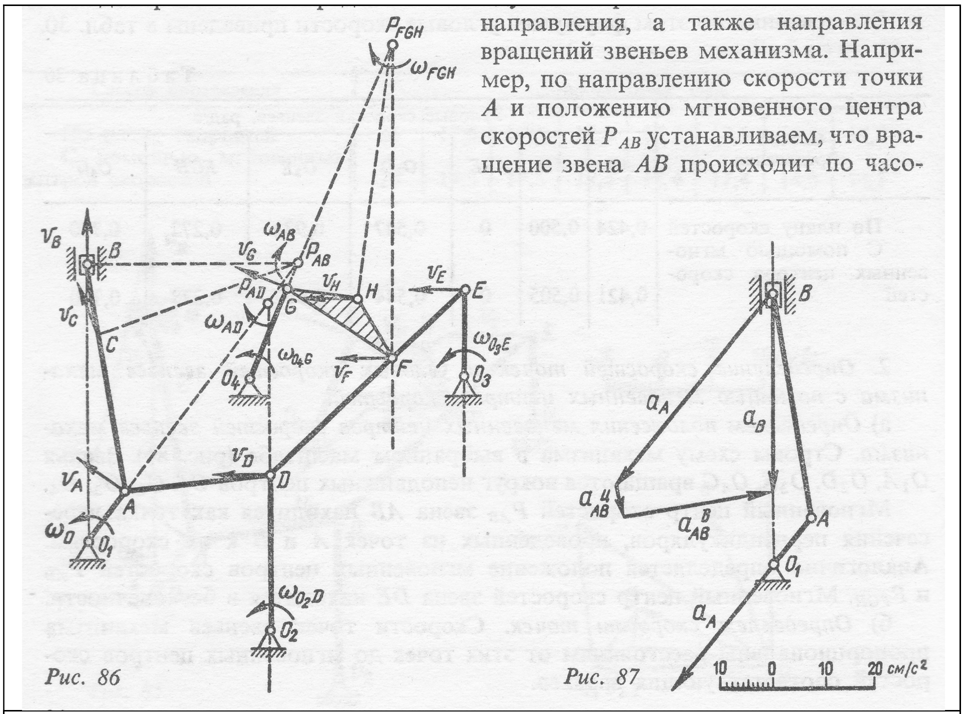

Рис.45 Рис.46

Звенья O_1A, O_2D, O_3E, O_4G вращаются вокруг неподвижных центров O_{1-4}.

Мгновенный центр скоростей P_{AB} звена AB находится как точка пересечения перпендикуляров, проведённых из точек A и B к их скоростям. Аналогично определяется положение мгновенных центров скоростей P_{AD}, P_{FGH} . Мгновенный центр скоростей звена DE находится в бесконечности.

б) *определяем скорости точек*. Скорости точек звеньев механизма пропорциональны расстояниям от этих точек до мгновенных центров скоростей соответствующих звеньев.

Эти расстояния измеряются на чертеже.

Для определения скоростей точек B, C звена AB имеем пропорции $v_A / v_B = AP_{AB} / BP_{AB}$; $v_A / v_C = AP_{AB} / CP_{AB}$.

Следовательно,

$$v_B = v_A \frac{BP_{AB}}{AP_{AB}};$$

$$v_C = v_A \frac{CP_{AB}}{AP_{AB}}.$$

Аналогично, для точки D звена AD

$$v_D = v_A \frac{DP_{AD}}{AP_{AD}}.$$

Т.к. мгновенный центр скоростей звена DE находится в бесконечности, то $v_E = v_F = v_D$.

Для определения скоростей точек G, H имеем пропорции $v_F / v_G = GP_{FGH} / FP_{FGH}$; $v_F / v_H = HP_{FGH} / FP_{FGH}$.
Следовательно,

$$v_G = v_F \frac{GP_{FGH}}{FP_{FGH}};$$

$$v_H = v_F \frac{HP_{FGH}}{FP_{FGH}}.$$

Пользуясь масштабом длин, определяем расстояния от точек до мгновенных центров скоростей.
Эти расстояния (см) приведены в таблице 27.

AP_{AB}	BP_{AB}	CP_{AB}	AP_{AD}	DP_{AD}	FP_{FGH}	GP_{FGH}	HP_{FGH}
57	41	41,5	47,5	34,5	62,7	52,8	50,8

Таблица 27

Скорости точек, вычисленные по указанным формулам, приведены в таблице 25.
Одновременно с определением модулей скоростей точек находим их направления, а также направления вращений звеньев механизма. Например, по направлению скорости точки A и положению мгновенного центра скоростей P_{AB} устанавливаем, что вращение звена AB происходит по часовой стрелке. Поэтому скорость точки B при данном положении механизма направлена вверх.
Аналогично определяем направления вращений остальных звеньев и направления скоростей точек механизма (рис.45).
в) *определяем угловые скорости звеньев механизма*. Скорость любой точки звена равна произведению угловой скорости этого звена на расстояние от точки до мгновенного центра скоростей:

$$v_A = \omega_{AB} AP_{AB} = \omega_{AD} AP_{AD}.$$

Отсюда определяем угловые скорости звеньев AB, AD:

$$\omega_{AB} = v_A / AP_{AD}; \quad \omega_{AD} = v_A / AP_{AD}.$$

Угловая скорость звена O_2D определяется по скорости точки D:

$$\omega_{O2D} = v_D / O_2D.$$

Угловая скорость звена DE при данном положении механизма равна нулю, т.к. мгновенный центр скоростей звена в этом случае находится в бесконечности: $\omega_{DE} = 0$.
Аналогично определяем угловые скорости остальных звеньев механизма:

$$\omega_{O3E} = v_E / O_3E;$$
$$\omega_{FGH} = v_F / FP_{FGH};$$
$$\omega_{O4E} = v_G / O_4G.$$

Угловые скорости звеньев, вычисленные по указанным соотношениям, приведены в таблице 26.

3. *Определение ускорений точек A, B, D и угловых ускорений звеньев AB, AD* [11].

а) *определяем* $\vec{a}_A, \vec{a}_B, \varepsilon_{AB}$ (рис.46). С помощью теоремы об ускорениях точек плоской фигуры определяем ускорение точки B:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^z_{AB} + \vec{a}^b_{AB}.$$

Т.к. кривошип O_1A вращается равномерно, то ускорение точки A направлено к центру O_1 и равно

$$a_A = a^z_A = O_1A\omega^2_{O1A} = 48 \text{ см/с}^2.$$

Центростремительное ускорение точки B во вращательном движении шатуна AB вокруг полюса A направлено от точки B к точке A и равно

$$a^z_{AB} = AB\omega^2_{AB} = 7{,}36 \text{ см/с}^2.$$

Откладываем от точки B в соответствующем масштабе ускорение полюса $\vec{a}_A$. Из конца этого вектора строим вектор $\vec{a}^z_{AB}$, проводя его параллельно BA. Через конец вектора $\vec{a}^z_{AB}$ проводим прямую, перпендикулярную BA, т.е. параллельную вращательному ускорению $\vec{a}^b_{AB}$. Точка пересечения этой прямой с прямой, по которой направлен вектор ускорения ползуна B, определяет концы векторов $\vec{a}_B$, и $\vec{a}^b_{AB}$.

Измерением на чертеже получаем $a_B = 39$ см/с^2; $a^b_{AB} = 30$ см/с^2.

Т.к. $a^b_{AB} = AB\varepsilon_{AB}$, то угловое ускорение звена

$$\varepsilon_{AB} = a^b_{AB} / AB = 30/46 = 0{,}652 \text{ рад/с}^2.$$

б) *определяем* $\vec{a}_D, \varepsilon_{AD}$ (рис.47). Точка D принадлежит двум звеньям: AD, O_2D. Взяв за полюс точку A, получаем

$$\vec{a}_D = \vec{a}_A + \vec{a}^z_{AD} + \vec{a}^b_{AD}.$$

[11] Условие задачи предусматривает определение ускорений точек A,B и углового ускорения звена AB. Однако в примере определяются также ускорение точки D и угловое ускорение звена AD в соответствии с двумя случаями, встречающимися в задачах такого типа.

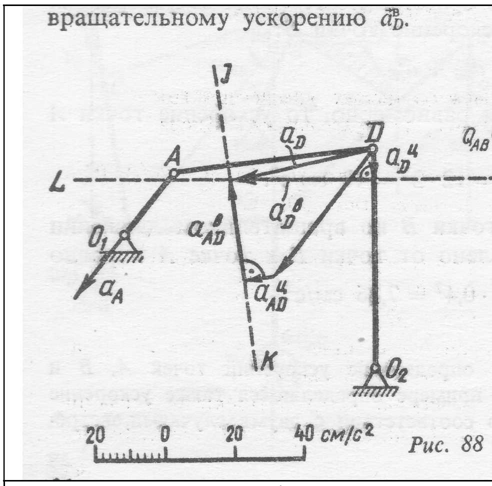

Рис.47

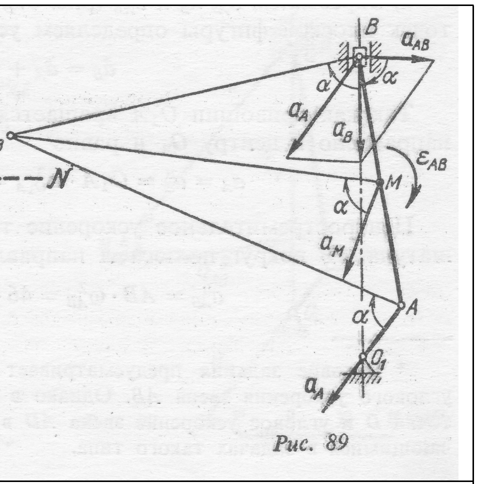

Рис. 48

Ускорение точки A найдено выше: $a_A = 48$ см/с^2.
Центростремительное ускорение точки D во вращательном движении звена AD вокруг полюса A направлено от точки D к точке A и равно

$$a_{AD}^{z} = AD \cdot \omega_{AD}^{2} = 7{,}1 \text{ см/с}^2.$$

Откладываем из точки D в соответствующем масштабе ускорение полюса $\vec{a}_A$. Из конца вектора $\vec{a}_A$ строим вектор $\vec{a}_{AD}^{z}$, проводя его параллельно DA. Через конец вектора $\vec{a}_{AD}^{z}$ проводим прямую перпендикулярно DA, т.е. параллельно вращательному ускорению $\vec{a}_{AD}^{b}$. Однако определить ускорение $\vec{a}_D$ этим построением невозможно, т.к. его направление неизвестно.
Чтобы найти ускорение точки D, необходимо выполнить второе построение, рассматривая эту точку как принадлежащую звену O_2D. В этом случае

$$\vec{a}_D = \vec{a}_D^{z} + \vec{a}_D^{b}.$$

Центростремительное ускорение точки D

$$a_D^{z} = O_2D \cdot \omega_{O2D}^{2} = 8 \text{ см/с}^2.$$

Откладываем от точки D вектор $\vec{a}_D^{z}$, направив его к центру O_2. Через конец вектора $\vec{a}_D^{z}$ проводим прямую LN перпендикулярно O_2D, т.е. параллельно вращательному ускорению $\vec{a}_D^{b}$.
Точка пересечения этой прямой с JK определяет концы векторов $\vec{a}_D, \vec{a}_{AD}^{b}, \vec{a}_D^{b}$.
Измерением на чертеже получаем $a_D = 42$ см/с^2; $a_{AD}^{b} = 30$ см/с^2.
Т.к. $a_{AD}^{b} = AD\varepsilon_{AD}$, то угловое ускорение звена AD

$$\varepsilon_{AD} = a_{AD}^{b} / AD = 30/29 = 1{,}03 \text{ рад/с}^2.$$

4. *Определение положения мгновенного центра ускорений звена АВ* (рис.48).
Примем точку A за полюс. Тогда ускорение точки B

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}\,.$$

Строим параллелограмм ускорений при точке B по диагонали $\vec{a}_B$ и стороне $\vec{a}_A$. Сторона параллелограмма $\vec{a}_{AB}$ выражает ускорение точки B во вращении AB вокруг полюса A. Ускорение $\vec{a}_{AB}$ составляет с отрезком AB угол α, который можно измерить на чертеже.

Направление вектора $\vec{a}^{\,b}_{AB}$ относительно полюса A позволяет определить направление ε_{AB}, в данном случае соответствующее направлению вращения часовой стрелки. Отложив угол α от векторов $\vec{a}_A$ и $\vec{a}_B$ в этом направлении и проводя две полупрямые, найдём точку их пересечения Q_{AB} – мгновенный центр ускорений звена AB.

5.*Определение ускорения точки* M. Найдём ускорение точки M с помощью мгновенного центра ускорений.

Ускорение точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра ускорений:

$$\frac{a_M}{a_A} = \frac{MQ_{AB}}{AQ_{AB}}\,.$$

Подставив расстояния, определённые по чертежу, $MQ_{AB} = 67{,}5$ см, $AQ_{AB} = 77$ см, получим ускорение точки M:

$$a_M = a_A \frac{MQ}{AQ} = 42{,}1 \text{ см/с}^2.$$

Ускорение $\vec{a}_M$ составляет с прямой MQ угол α; направление этого вектора соответствует угловому ускорению ε_{AB}.

ДИНАМИКА

I.Динамика материальной точки.

Задача Д1[12]. Интегрирование ДУ[13] движения материальной точки, находящейся под действием постоянных сил.

Варианты 1-5 (рис.20 приложения, схема 1 и данные в таблице 31). Тело движется из точки A по участку AB длиной l наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, в течение τ с. Его начальная скорость v_A. Коэффициент трения скольжения тела по наклонной плоскости равен f.

В точке B тело покидает плоскость со скоростью v_B и попадает со скоростью v_C в точку C плоскости BD, наклонённой к горизонту под углом β, находясь в воздухе T с.

При решении задачи тело принять за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

№ вар-та	Размеры, м			Углы, в град		Коэф. трения f	v_A, м/с	v_B, м/с	Время τ, с	Определить
	h	l	d	α	β					
1	-	10	-	30	60	0,2	0	-	-	τ и h
2	4	-	-	15	45	0,2	2	-	-	l и уравнение траектории на ВС
3	-	8	10	30	60	$\neq 0$	2,5	-	-	v_B и τ
4	-	9,8	-	-	60	0	0	-	2	α и Т
5	-	9,8	-	30	45	-	0	-	3	f и v_C

Таблица 31

№ вар-та	Размеры, м			Углы, в град		Коэф. трения f	v_A, м/с	v_B, м/с	Время τ, с	Определить
	h	l	d	α	β					
6	40	-	-	20	30	0,1	-	-	0,2	l и v_C
7	-	5	-	15	45	0,1	16	-	-	v_B и Т
8	-	-	-	-	60	0	21	20	0,3	α и d
9	$30\sqrt{2}$	-	-	15	45	0,1	-	-	0,3	v_A и v_B
0	-	-	50	15	60	0	12	-	-	τ и уравнение траектории на ВС

Таблица 32

Варианты 6-0 (рис.20 приложения, схема 2 и данные в таблице 32). Лыжник подходит к точке A участка трамплина AB, наклонённого под углом α к горизонту и имеющего длину l, со скоростью v_A. Коэффициент трения скольжения лыж на участке AB равен f. Лыжник от A до B движется τ с; в точке B он покидает трамплин со скоростью v_B. Через T с лыжник приземляется со скоростью v_C в точке C горы, составляющей угол β с горизонтом.

---

[12] Задание Д.1 из «Сборника заданий для курсовых работ по теоретической механике» под ред. Яблонского А.А. - М, 1985.

[13] Дифференциальные уравнения.

При решении задачи принять лыжника за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха.

<u>Пример выполнения задания (рис.52).</u> В железнодорожных скальных выемках для защиты кюветов от попадания в них с откосов каменных осыпей устраивается «полка» DC. Учитывая возможность движения камня из наивысшей точки A откоса и полагая при этом его начальную скорость $v_0 = 0$, определить наименьшую ширину полки b и скорость v_C, с которой камень падает на неё. По участку AB откоса, составляющему угол α с горизонтом и имеющему длину l, камень движется τ с.

При решении задачи считать коэффициент трения скольжения f камня на участке AB постоянным, а сопротивлением воздуха пренебречь.

Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 60°$; $l = 4$ м; $\tau = 1$ с; $f \neq 0$; $h = 5$ м; $\beta = 75°$. Определить b и v_C.

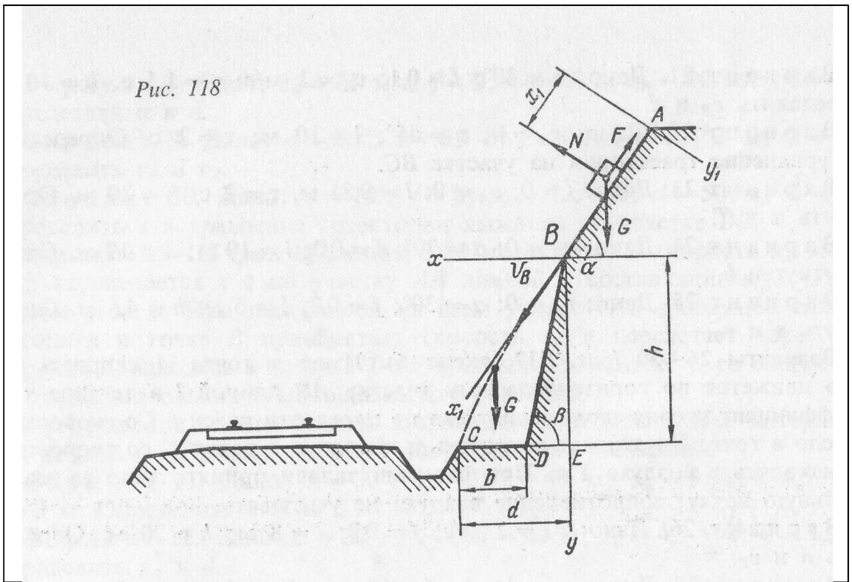

Рис.52

Р е ш е н и е . Рассмотрим движение камня на участке AB. Принимая камень за материальную точку, покажем (рис.52) действующие на него силы: вес $\vec{G}$, нормальную реакцию $\vec{N}$ и силу трения скольжения $\vec{F}$. Составим ДУ[14] движения камня на участке AB:

$$m\ddot{x}_1 = \sum X_{i1}; \quad m\ddot{x}_1 = G\sin\alpha - F.$$

Сила трения $F = fN$, где $N = G\cos\alpha$.

Т.о.

$$m\ddot{x}_1 = G\sin\alpha - fG\cos\alpha$$

или

[14] Дифференциальное уравнение.

$$\ddot{x}_1 = g\sin\alpha - fg\cos\alpha .$$

Интегрируя ДУ дважды, получаем

$$\dot{x}_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t + C_1 ;$$
$$x_1 = \frac{g\,t^2}{2}(\sin\alpha - f\cos\alpha) + C_1 t + C_2 .$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся н.у.[15] задачи: при $t = 0$ $x_{10} = 0$ и $\dot{x}_{10} = 0$.
Составим уравнения, полученные при интегрировании, для $t = 0$:

$$\dot{x}_{10} = C_1 ; \qquad x_{10} = C_2 .$$

Найдём постоянные:

$$C_1 = 0 , \qquad C_2 = 0 .$$

Тогда

$$\dot{x}_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t ;$$
$$x_1 = \frac{g\,t^2}{2}(\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

Для момента τ , когда камень покидает участок,

$$\dot{x}_1 = v_B ; \qquad x_1 = l ,$$

т.е.

$$v_B = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\tau ;$$
$$l = \frac{g\,\tau^2}{2}(\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

Откуда $v_B = 2l/\tau = 8$ м/с.
Рассмотрим движение камня от точки B до точки C.
Показав силу тяжести $\vec{G}$, действующую на камень, составим ДУ его движения:

$$m\ddot{x} = 0 ; \qquad m\ddot{y} = G .$$

[15] Начальные условия.

Н.у. задачи: при $t = 0$

$$x_0 = 0; \qquad y_0 = 0;$$
$$\dot{x}_0 = v_B \cos\alpha; \quad \dot{y}_0 = v_B \sin\alpha.$$

Интегрируем ДУ дважды:

$$\dot{x} = C_3; \qquad \dot{y} = gt + C_4;$$
$$x = C_3 t + C_5; \qquad y = \frac{gt^2}{2} + C_4 t + C_6.$$

Напишем полученные уравнения для $t = 0$:

$$\dot{x}_0 = C_3 \qquad \dot{y}_0 = C_4;$$
$$x_0 = C_5; \qquad y_0 = C_6.$$

Отсюда найдём, что

$$C_3 = v_B \cos\alpha; \quad C_4 = v_B \sin\alpha;$$
$$C_5 = 0; \qquad C_6 = 0.$$

Получим следующие уравнения проекций скоростей камня:

$$\dot{x} = v_B \cos\alpha; \quad \dot{y} = gt + v_B \sin\alpha$$

и уравнения его движения:

$$x = v_B \cos\alpha \cdot t; \quad y = \frac{gt^2}{2} + v_B \sin\alpha \cdot t.$$

Уравнение траектории камня найдём, исключив параметр t из уравнения движения. Определив t из первого уравнения и подставив его во второе, получаем уравнение параболы:

$$y = \frac{g}{2v_B^2 \cos^2\alpha} x^2 + x \cdot tg\alpha$$

В момент падения $y = h$, $x = d$.
Определяя d из уравнения траектории, найдём $d_1 = 2{,}11$ м и $d_2 = -7{,}75$ м.
Т.к. траекторией движения камня является ветвь параболы с положительными абсциссами её точек, то $d = 2{,}11$ м.
Минимальная ширина полки

$$b = d - ED = d - \frac{h}{tg75}\text{, или } b = 0{,}77 \text{ м.}$$

Используя уравнение движения камня $x = v_B \cos\alpha \cdot t$, найдём время T движения камня от точки B до точки C:

Скорость камня при падении найдём через проекции скорости на оси координат

$$\dot{x} = v_B \cos\alpha\,; \quad \dot{y} = gt + v_B \sin\alpha$$

по формуле $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$.

Для момента падения $t = T = 0{,}53$ с

$$v_C = \sqrt{(v_B \cos\alpha)^2 + (gT + v_B \sin\alpha)^2} = 12{,}8 \text{ м/с.}$$

Приложение. Рисунки к вариантам заданий

Задача С1. Определение реакций опор твёрдого тела.

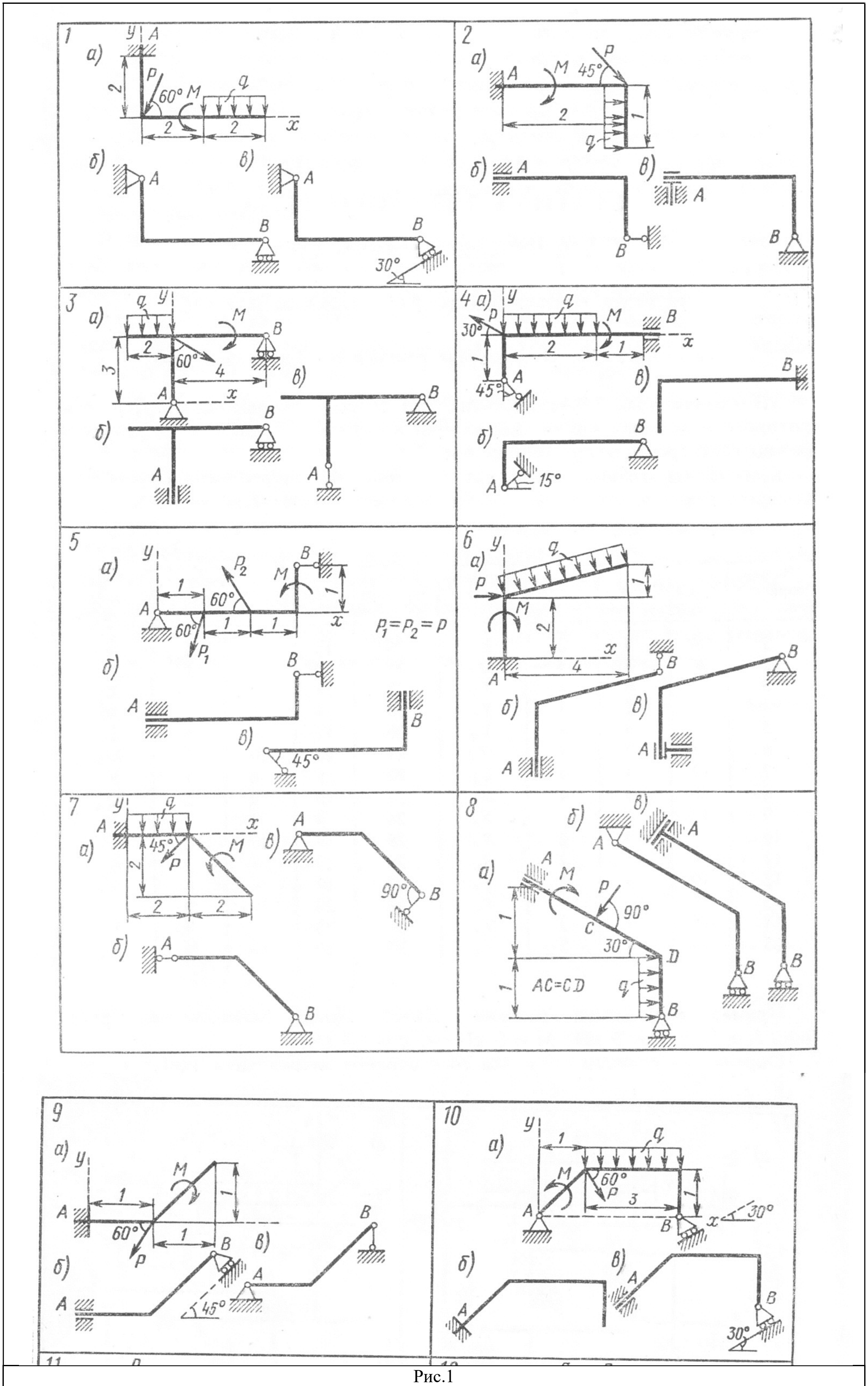

Рис.1

Задача К2. Определение скоростей и ускорений точек АТТ при поступательном и вращательном движениях.

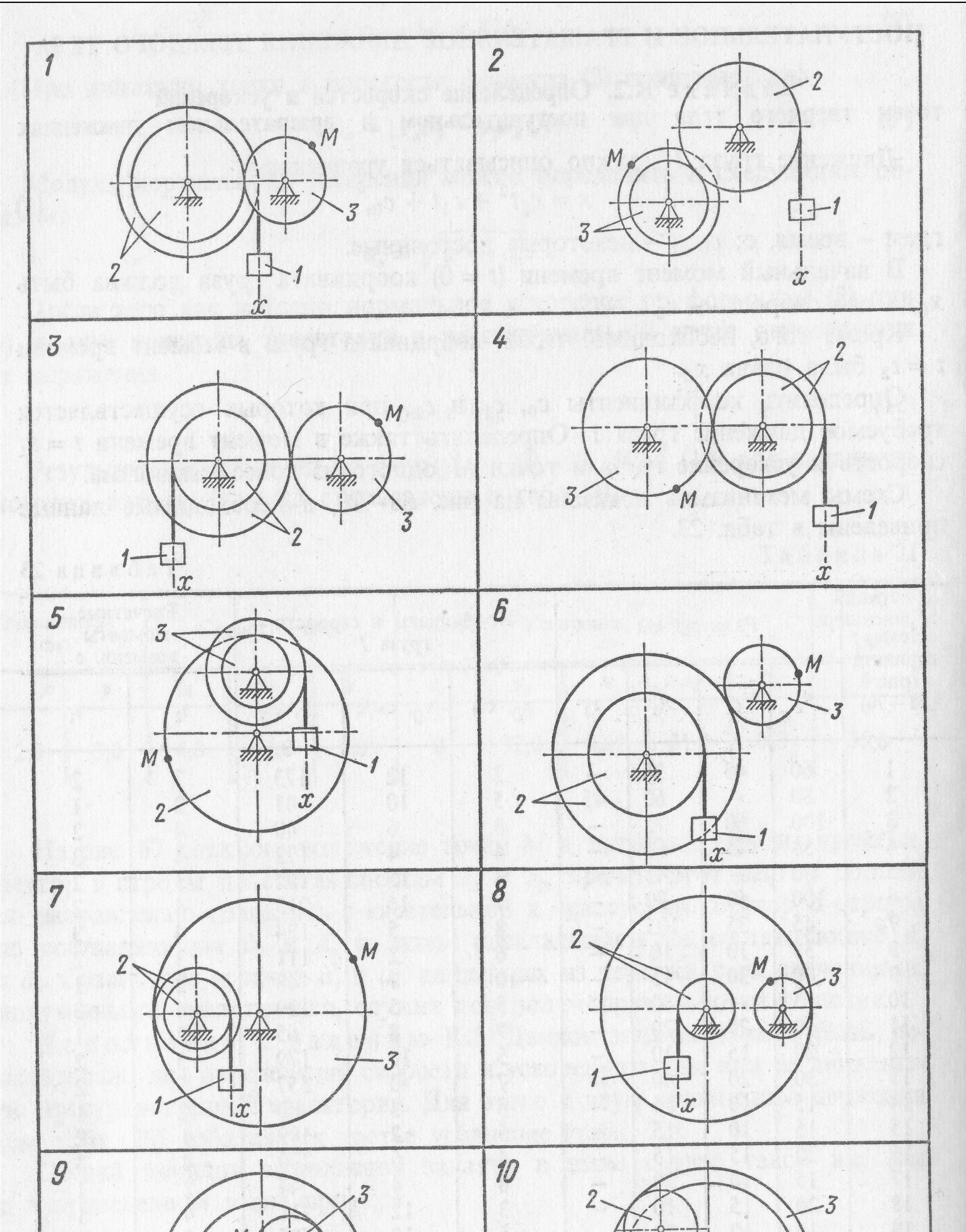

Рис.14

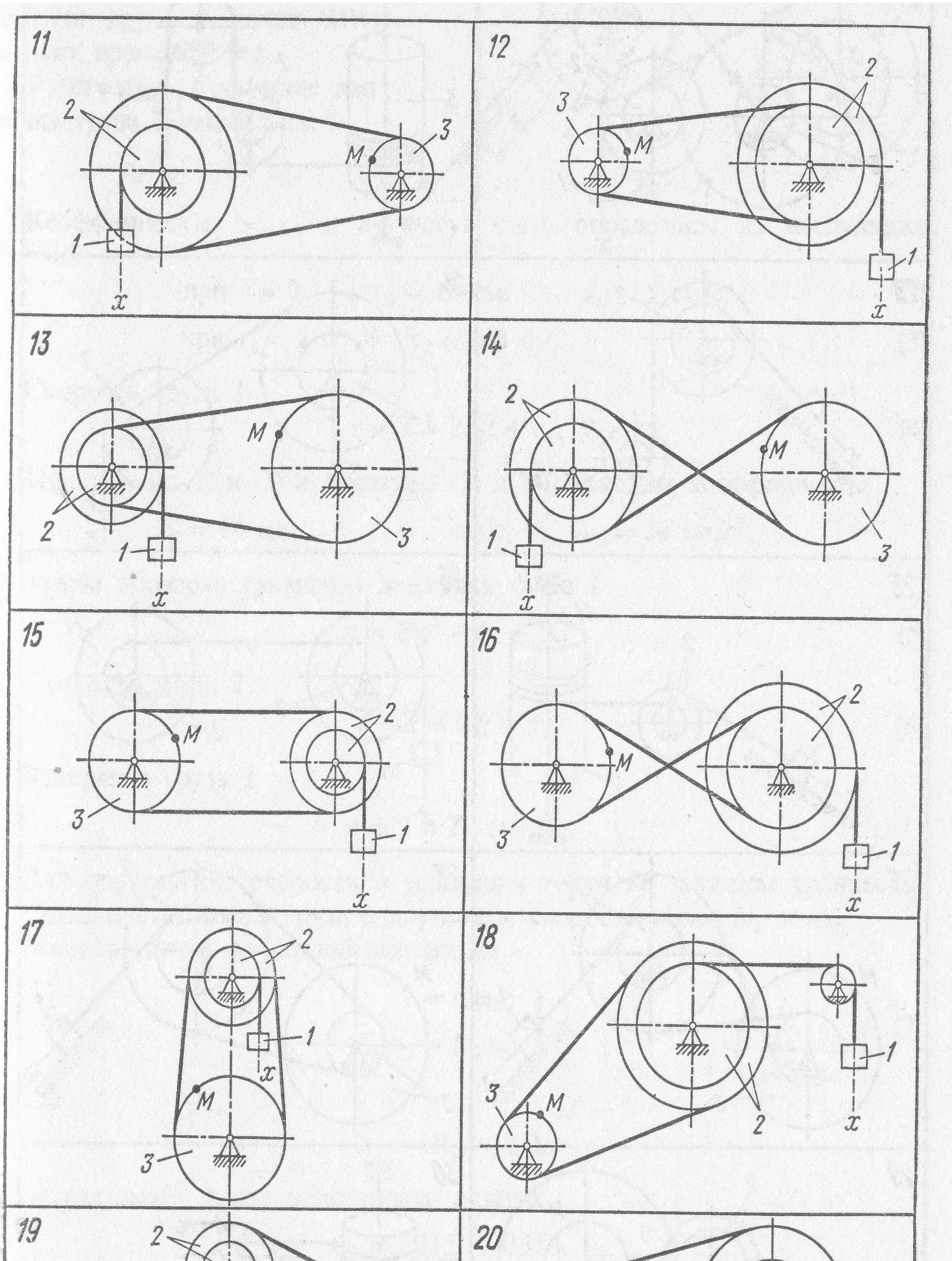
11
2
3
M
1
x
12
3
M
2
1
x
13
M
2
3
1
x
14
2
M
3
1
x
15
M
2
3
1
x
16
2
M
3
1
x
17
2
1
x
M
3
18
1
3
M
x
2
19
2
M
3
1
x
20
1
x
3
M
2

Рис.15

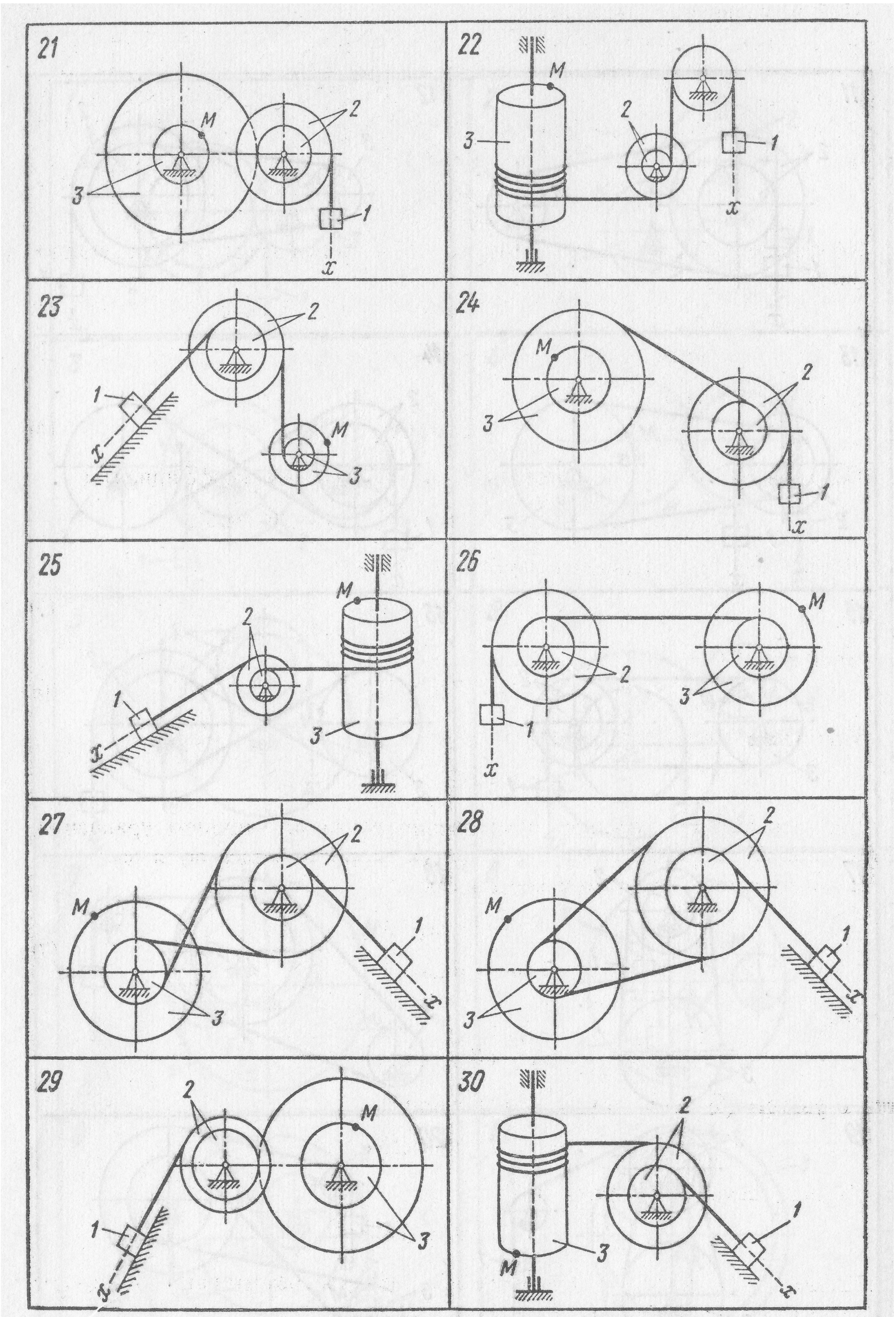
21
M
2
3
1
x
22
M
3
2
1
x
23
2
1
x
M
3
24
M
2
3
1
x
25
M
2
1
x
3
26
M
2
3
1
x
27
2
M
1
3
x
28
2
M
1
3
x
29
2
M
1
3
x
30
2
1
3
M
x

Рис.16

Задача К3. Кинематический анализ плоского механизма.

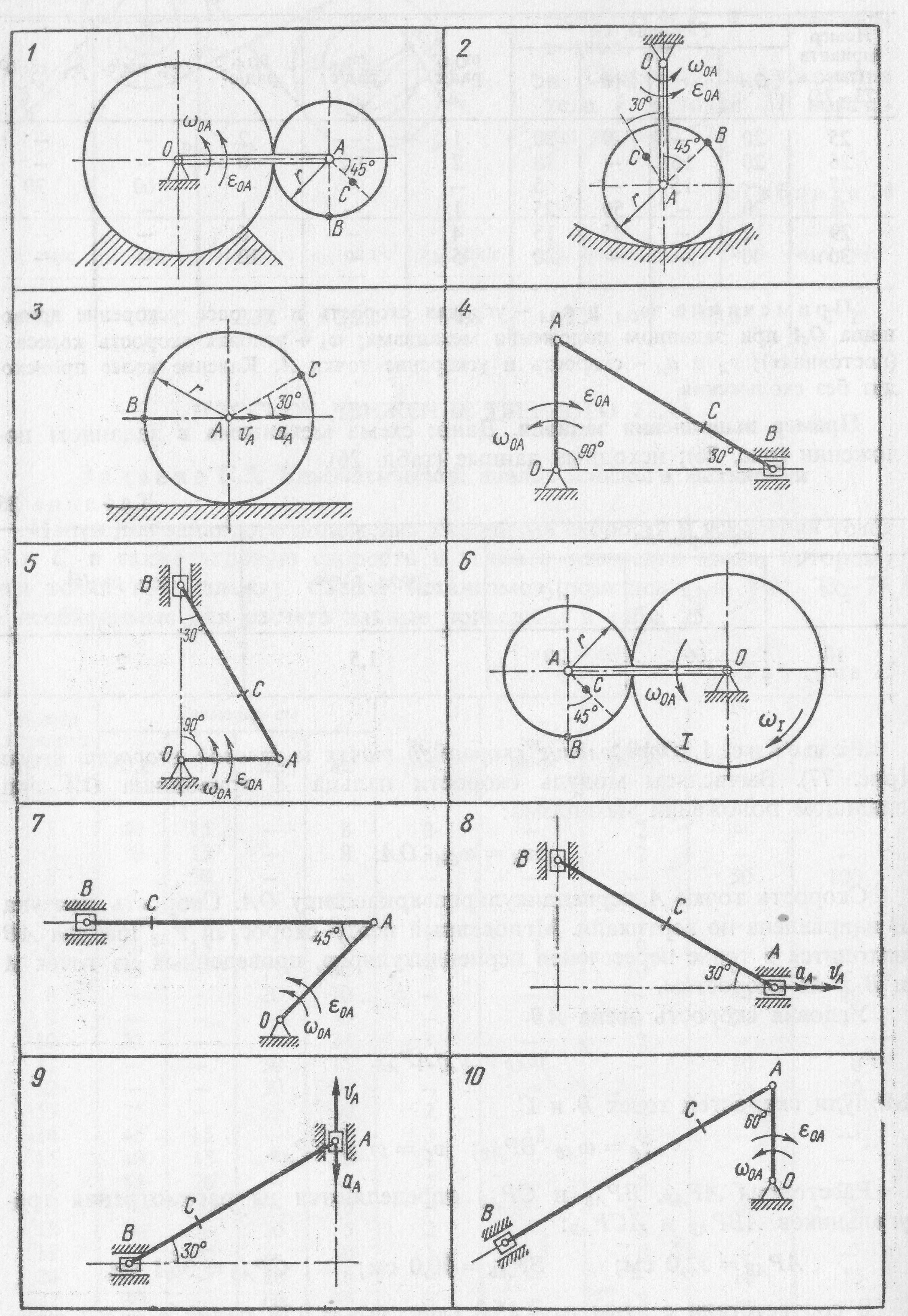

Рис.17

Задача К4. Кинематический анализ плоского механизма.

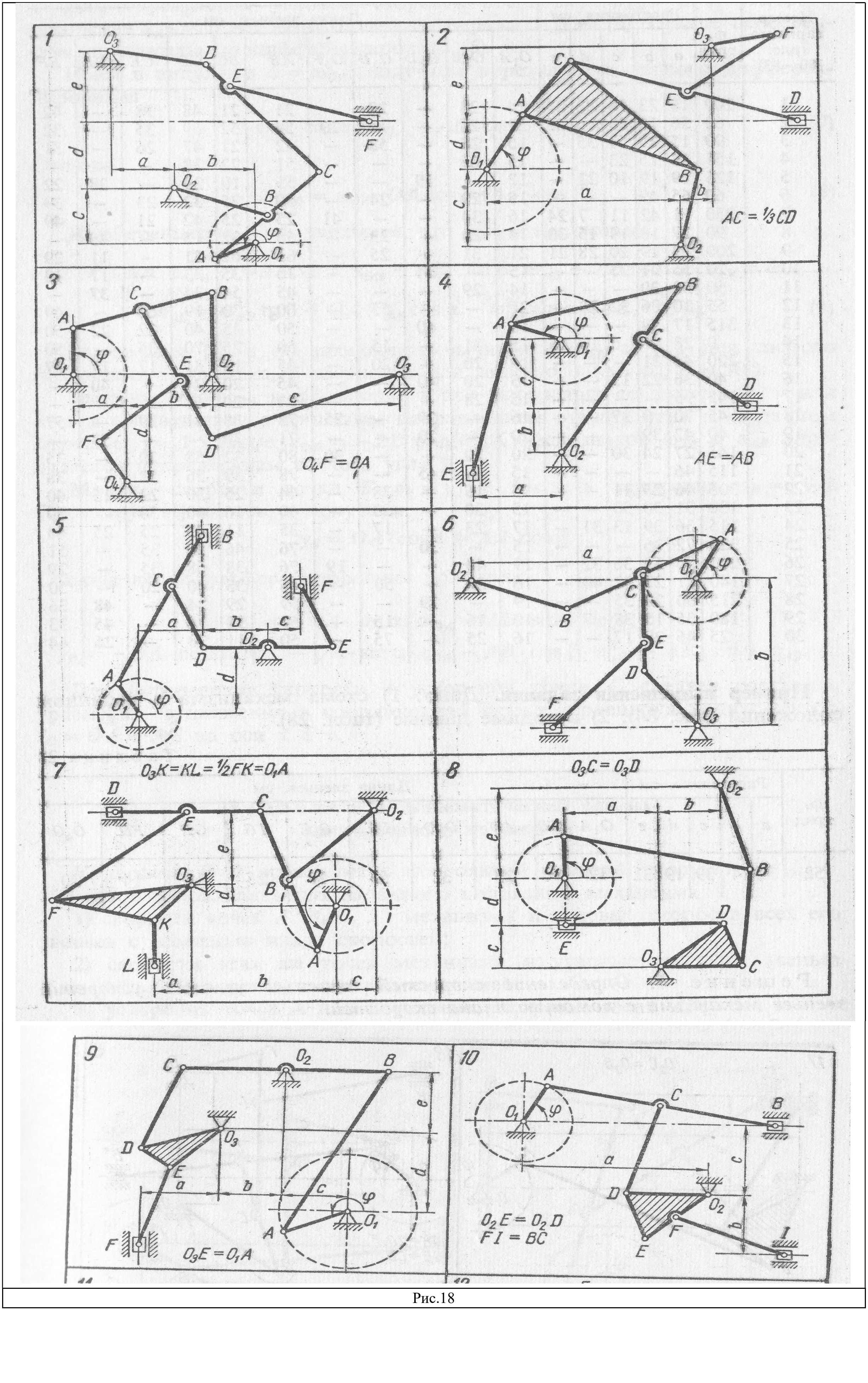

Рис.18

Задача Д1. Интегрирование ДУ движения материальной точки, находящейся под действием постоянных сил.

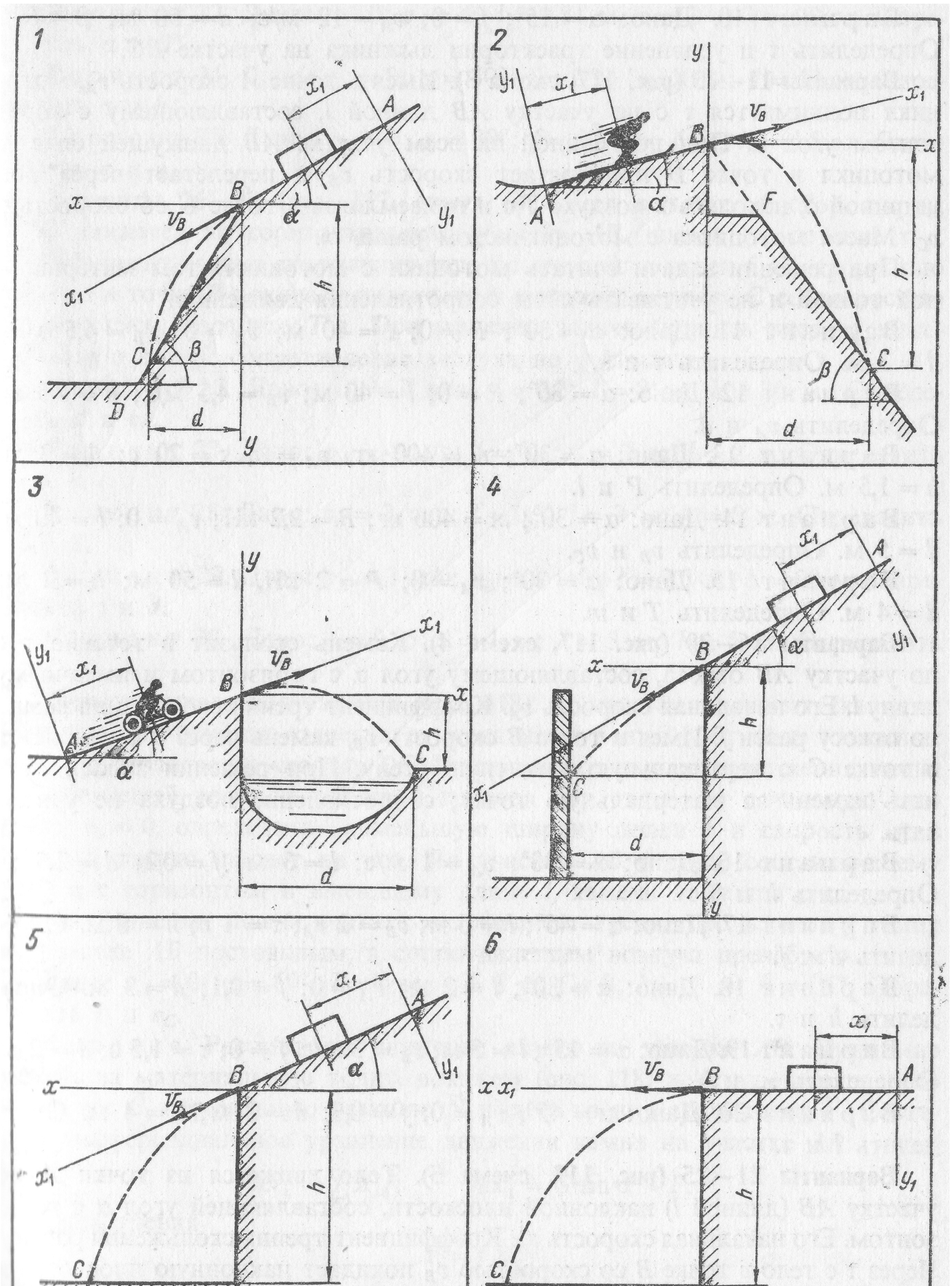

Рис.20